# ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

## ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

**Ορισμός**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική ή παράγουσα συνάρτηση** της f στο Δ, ονομάζεται κάθε συνάρτηση F, παραγωγίσιμη στο Δ, τέτοια ώστε: $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in \Delta$.

- Για παράδειγμα η συνάρτηση $F(x)=x^3+\text{συν}x$ είναι μια αρχική της $f(x)=3x^2+\text{ημ}x$ γιατί $F'(x)=(x^3+\text{συν}x)'=3x^2+\text{ημ}x=f(x)$.
- Στο παράδειγμα αυτό αν, αντί της F είχαμε την συνάρτηση $G(x)=x^3+\text{συν}x+c$, όπου $c\in \Re$, τότε $G'(x)=(x^3+\text{συν}x+c)'=3x^2+\text{ημ}x=f(x)$. Δηλαδή οι F και G είναι και οι δύο αρχικές ή παράγουσες της f.

Γενικά ισχύει το εξής:

**Θεώρημα**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια αρχική της f στο Δ, τότε:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in \Re$ είναι αρχικές της f στο Δ και
- Κάθε άλλη αρχική συνάρτηση της f στο Δ παίρνει τη μορφή $F(x)+c$, όπου $c\in \Re$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση που έχει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in \Re$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ γιατί: $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)+c'=f(x)+0=f(x)$ για κάθε x στο Δ.
- Αν G μία άλλη παράγουσα της f στο Δ τότε ισχύει: $G'(x)=f(x)$ και $F'(x)=f(x)$. Επομένως $G'(x)=F'(x)$ για κάθε x στο Δ. Άρα σύμφωνα με γνωστό πόρισμα , θα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε x στο Δ.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

- Η έννοια της αρχικής συνάρτησης είναι μία έννοια που ορίζεται σε **διάστημα** και όχι σε ένωση διαστημάτων.
- Αποδεικνύεται ότι κάθε **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει αρχική συνάρτηση στο διάστημα αυτό.

****************

## ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Το σύνολο όλων των παραγουσών της f στο Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ** και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$. Δηλαδή:

$$\int f(x)dx=F(x)+c, \text{ για κάθε } x \in \Delta \text{ και } c \in \Re, \text{ όπου F μια παράγουσα της f.}$$

- **Π.χ:** $\int ημx dx=-συνx+c$, γιατί $(-συνx)'=ημx$.

Προφανώς ισχύει ότι:

| |
|---|
| Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. ισχύει: $\int f'(x)dx=f(x)+c,\ c \in \Re$. |

Το «dx» στην έκφραση $\int f(x)dx$ ονομάζεται **διαφορικό του x.** Γενικά με df(x) συμβολίζουμε το διαφορικό μίας συνάρτησης f και είναι: $df(x)=f'(x)dx$

Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος είναι η αντίστροφη της διαδικασίας της παραγώγισης.
Τα αόριστα ολοκληρώματα μερικών βασικών συναρτήσεων δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\int 0dx=c$ | 6. | $\int ημx dx=-συνx+c$ |
| 2. | $\int 1dx=x+c$ | 8. | $\int \frac{1}{συν^2x}dx=εφx+c$ |
| 3. | $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$ | 8. | $\int \frac{1}{ημ^2x}dx=-σφx+c$ |
| 4. | $\int x^{α}dx=\frac{x^{α+1}}{α+1}+c,\ α \neq -1$ | 10. | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |
| 5. | $\int συνx dx = ημx + c$ | 11. | $\int α^{x}dx=\frac{α^{x}}{\lnα}+c$ |
| 6. | $\int e^{αx}dx=\frac{e^{αx}}{α}+c$ | 12. | $\int ημαx dx=\frac{-συναx}{α}+c$ |
| 7. | $\int \frac{1}{αx+β}dx=\frac{\ln\lvert αx+β\rvert}{α}+c$ | 13. | $\int συναx dx=\frac{ημαx}{α}+c$ |

Αποδεικνύονται οι εξής ιδιότητες :

| |
|---|
| $\int λf(x)dx=λ\int f(x)dx,\ λ \in \Re$ |
| $\int \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ |

**Παράδειγμα:**

- $\int \frac{x^3-x^2+x+1}{x^2}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int xdx-\int 1dx+\int\frac{1}{x}dx+\int x^{-2}dx=$
$\frac{x^2}{2}-x+\ln|x|-\frac{1}{x}+c.$

# ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

## Α) Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Αν f και g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ένα διάστημα Δ τότε ισχύει:
$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

**ΠΑΡΑΤΗΡΉΣΕΙΣ**
Η μέθοδος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων γινομένων συναρτήσεων κυρίως των εξής μορφών:

- $\int(\text{πολυων})\cdot(\text{εκθ}_1)dx=\int(\text{πολυων})\cdot(\text{ΕΚΘ}_2)'dx=.........$
- $\int(\text{πολυων})\cdot(\text{τριγων}_1)dx=\int(\text{πολυων})\cdot(\text{ΤΡΙΓΩΝ}_2)'dx=.........$
- $\int(\text{πολυων}_1)\cdot(\text{λογαριθ})dx=\int(\text{ΠΟΛΥΩΝ}_2)'\cdot(\text{λογαριθ})dx=.........$
- $\int(\text{εκθετ}_1)\cdot(\text{τριγων})dx=\int(\text{ΕΚΘΕΤ}_2)'\cdot(\text{τριγων})dx$

(όπου με κεφαλαία σημειώνεται η αρχική της αντίστοιχης συνάρτησης του πρώτου ολοκληρώματος).

## Β) Ολοκλήρωση με αντικατάσταση μεταβλητής

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζονται ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$. Η μέθοδος ακολουθεί την εξής διαδικασία:

$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$ όπου θέσαμε $g(x)=u$ οπότε $du=g'(x)dx$.

**ΣΧΟΛΙΟ**

Οι δύο παραπάνω μέθοδοι χρησιμοποιούνται με την προϋπόθεση ότι τα ολοκληρώματα του δευτέρου μέλους είναι ευκολότερα στον υπολογισμό.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής
  $\int(\alpha x+\beta)^{\nu}dx,\quad \int e^{\alpha x+\beta}dx,\quad \int \eta\mu(\alpha x+\beta)dx,\quad \int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)dx\quad \int\frac{1}{(\alpha x+\beta)^{\nu}}dx$
  κάνουμε την αντικατάσταση $u=\alpha x+\beta,\ dx=du$.

- Αν το ολοκλήρωμα περιέχει άρρητη παράσταση της μορφής $\sqrt{A(x)}$ τότε θέτω $\sqrt{A(x)}=u\Rightarrow u^2=A(x)$ οπότε $2udu=A'(x)dx$

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής
  $\int \eta\mu^{2\nu+1}x dx,\quad \int \eta\mu^{2\nu+1}x\sigma\upsilon\nu^{\kappa}x dx,\quad \int\frac{\eta\mu^{2\nu+1}x}{\sigma\upsilon\nu^{\kappa}x}dx,\ \kappa,\nu\in N^*$ θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$.

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής
  $\int \sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x dx,\quad \int \sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x\eta\mu^{\kappa}x dx,\quad \int\frac{\sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x}{\eta\mu^{\kappa}x}dx,\ \kappa,\nu\in \mathbb{N}^*$ θέτουμε $u=\eta\mu x$.

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής
  $\int\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$ με $\beta^2-4\alpha\gamma>0$
  αν $x_1$, $x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου τότε αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς μ και ν τέτοιους, ώστε: $\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{\mu}{x-x_1}+\frac{\nu}{x-x_2}$ και χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο απλούστερα ολοκληρώματα. **(Μέθοδος ανάλυσης κλάσματος σε άθροισμα απλών κλασμάτων)**

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής
  $\int\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$ με $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ αν $x_o$ η διπλή ρίζα του τριωνύμου τότε αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς μ και ν τέτοιους ώστε:
  $\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{\mu}{x-x_0}+\frac{\nu}{(x-x_0)^2}$ και χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο απλούστερα ολοκληρώματα όπως προηγουμένως.

- Αν το ολοκλήρωμα έχει τη μορφή $\int\frac{A(x)}{ax^2+\beta x+\gamma}dx,\ \beta^2-4\alpha\gamma>0$ όπου το πολυώνυμο A(x) έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2 τότε, κάνουμε πρώτα την διαίρεση $A(x):\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Αν π(x) το πηλίκο και $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$ το υπόλοιπο τότε έχουμε: $\frac{A(x)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\pi(x)+\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$. Επομένως παίρνουμε:

$\int \frac{A(x)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx=\int \pi(x)dx+\int \frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$. και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int ημ^{2\nu}xdx$, $\int συν^{2\nu}xdx$, $\int \frac{ημ^{2\nu}x}{συν^{2\rho}x}dx$ χρησιμοποιούμε τους **τύπους αποτετραγωνισμού** από την τριγωνομετρία $ημ^2x=\frac{1-συν2x}{2}$, $συν^2x=\frac{1+συν2x}{2}$ και χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε άθροισμα απλούστερων ολοκληρωμάτων.

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int ημ^{2\kappa+1}xdx$, $\int συν^{2\kappa+1}xdx$ διασπάμε τον εκθέτη και κάνουμε αντικατάσταση μεταβλητής. Π.χ. στο πρώτο
$\int ημ^{2k+1}xdx=\int ημ^{2k}x\cdot ημxdx=\int \left(ημ^2x\right)^{\kappa}\cdot ημxdx=\int \left(1-συν^2x\right)^{\kappa}\cdot ημxdx.$ .
Θέτουμε $συνx=u \Rightarrow (συνx)'dx=du \Rightarrow ημxdx=-du$ και παίρνουμε ολοκλήρωμα πολυωνυμικής που υπολογίζεται εύκολα.

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int ημ^{\nu}xσυν^{\kappa}xdx$ :
Αν οι ν, κ είναι άρτιοι, χρησιμοποιώ τους τύπους αποτετραγωνισμού.
Αν ένας από αυτούς είναι περιττός π.χ. ν=2ρ+1 τότε διασπάμε τον εκθέτη όπως προηγουμένως και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία.

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int ημκxσυνλxdx$, $\int συνκxσυνλxdx$, $\int ημκxημλxdx$ χρησιμοποιώ τους τύπους μετατροπής γινομένων σε αθροίσματα:
  $2ημασυνβ=ημ(α+β)+ημ,(α-β)$
  $2συνασυνβ=συν(α+β)+συν(α-β)$
  $2ημαημβ=συν(α-β)-συν(α+β)$

- Αν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int f\left(\sqrt[\nu_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[\nu_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},......,\sqrt[\nu_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ θέτουμε $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=u$, όπου ν το Ε.Κ.Π. των αριθμών $\nu_1, \nu_2,\ldots\ldots,\nu_\kappa$ και παίρνουμε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u.

- Αν έχουμε ολοκλήρωμα ρητής παράστασης των ημx και συνx ή των ημ2x και συν2x τα μετατρέπω όλα σε εφ$\frac{x}{2}$ ή εφx χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$\eta\mu x=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}},\qquad \sigma\upsilon\nu x=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}},\qquad \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\eta\mu 2x=\frac{\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

$$\eta\mu^2 x=\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x},\qquad \sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x},\qquad \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1-\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

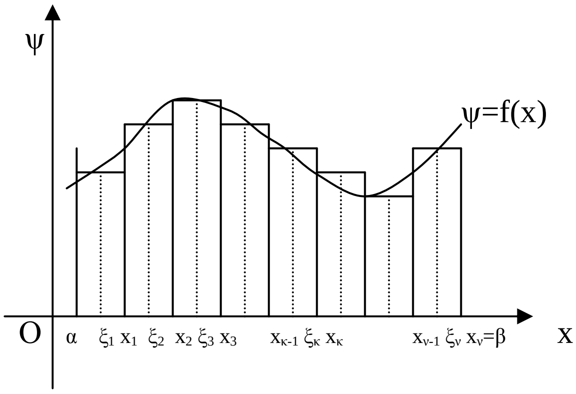
και κάνω αλλαγή μεταβλητής: $\varepsilon\varphi x=u$ ή $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=u$.

- Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους, αφού πρώτα φέρουμε τη συνάρτηση στην αντίστοιχη μορφή:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int f^{\alpha}(x)f'(x)dx=\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c,\ \alpha\neq -1$ | 8 | $\int \alpha^{f(x)}f'(x)dx=\frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha}+c$ |
| 2 | $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+c$ | 9 | $\int \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}dx=\varepsilon\varphi f(x)+c$ |
| 3 | $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+c$ | 10 | $\int \frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}dx=-\sigma\varphi f(x)+c$ |
| 4 | $\int \eta\mu f(x)f'(x)dx=-\sigma\upsilon\nu f(x)+c$ | 11 | $\int (f'(x)\pm g'(x))dx=\int f'(x)dx\pm\int g'(x)dx$ |
| 5 | $\int \sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)dx=\eta\mu f(x)+c$ | 12 | $\int (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx=f(x)g(x)+c$ |
| 6 | $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=-\frac{1}{f(x)}+c$ | 13 | $\int \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx=\frac{f(x)}{g(x)}+c$ |
| 7 | $\int e^{f(x)}f'(x)dx=e^{f(x)}+c$ | 14 | $\int g'(f(x))f'(x)dx=g(f(x))+c$ |

# ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

## Ορισμός εμβαδού επίπεδου χωρίου




Έστω μια **συνεχής** συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α, β] με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=α και x=β. Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα που το καθένα έχει μήκος $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha=x_o<x_1<x_2<\ldots\ldots<x_\nu=\beta$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, k=1, 2, 3,……,ν επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο $\xi_k$ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών ισούται με

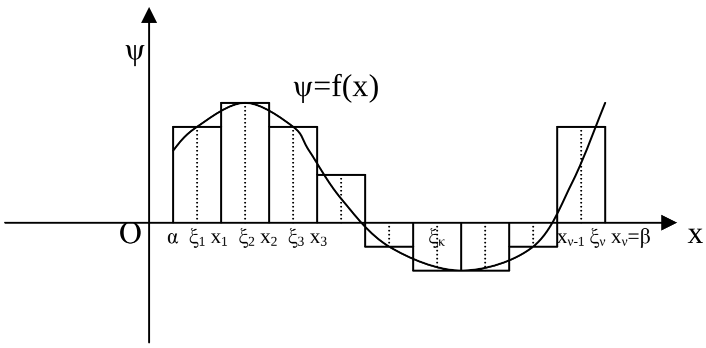
$$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\ldots\ldots+f(\xi_\nu)\Delta x.$$

- Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός (έστω I) και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων $\xi_k$.

  Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω** και συμβολίζεται με Ε(Ω). Είναι φανερό ότι $E(\Omega)\geq 0$.

## Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f **συνεχής** στο [α, β]. Με τα σημεία $\alpha=x_o<x_1<x_2<\ldots\ldots<x_\nu=\beta$ χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ για κάθε κ=1, 2, 3,…….,ν και σχηματίζουμε το άθροισμα: $S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+……..+f(\xi_\nu)\Delta x$. το οποίο συμβολίζουμε, σύντομα ως εξής: $S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x$.

Αποδεικνύεται ότι:

«Το όριο του αθροίσματος $S_\nu$, δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x\right)$ υπάρχει στο $\Re$ και είναι ανεξάρτητο από την εκλογή των ενδιάμεσων σημείων $\xi_k$»

Το όριο αυτό ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται **ολοκλήρωμα της f από το α στο β.** Δηλαδή: $\int_a^\beta f(x)dx=\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x\right)$.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ

- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια ολοκλήρωσης.**

- Η συνάρτηση f λέγεται **ολοκληρώσιμη** στο διάστημα [α, β]. Όπως προκύπτει από τον ορισμό του ολοκληρώματος, κάθε συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β].

- Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι σταθερός αριθμός, αν τα άκρα α και β είναι σταθερά.

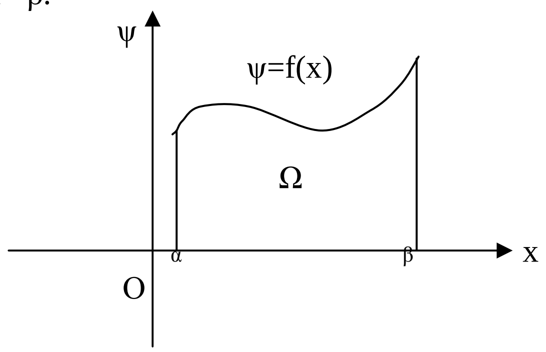
- Το γράμμα x στην έκφραση $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι μία μεταβλητή (η μεταβλητή ολοκλήρωσης) που μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι έχουμε: $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(t)dt = \int_a^\beta f(u)du$.

- Ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται και όταν $\alpha \geq \beta$ ως εξής: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$.

- Είναι προφανές ότι: $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$.

- Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

  Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$ τότε, το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ , τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=α και x =β.




Δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega)$. Επομένως αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ αφού $E(\Omega) \geq 0$.(Το = ισχύει όταν η f είναι η μηδενική συνάρτηση στο [α, β].

**Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος**

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται τα επόμενα θεωρήματα:

**Θεώρημα 1ο**

Έστω f και g **συνεχείς** συναρτήσεις στο [α, β] και λ, μ $\in \Re$. Τότε ισχύουν:

- $\int_{a}^{\beta} \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_{a}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ και γενικά
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda \cdot f(x)+\mu \cdot g(x)]dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

**Θεώρημα 2ο**

Αν η f είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ $\in \Delta$ , τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

( Το γ μπορεί να είναι και εκτός του διαστήματος που έχει άκρα τα α και β)

**Θεώρημα 3ο**

Έστω f μία **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in$ [α, β] και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0.$$

## Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ χωρίς τη χρήση του ορισμού (που είναι μία πολύ δύσκολη διαδικασία) θα γίνει με το **θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού** που θα αναφέρουμε παρακάτω. Η απόδειξή του στηρίζεται στο εξής

**Θεώρημα**

Αν f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

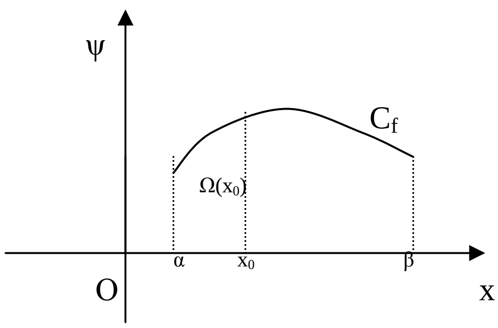
$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\quad x\in\Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x),\quad \text{για κάθε } x\in\Delta.$$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Ο ορισμός της συνάρτησης F γεωμετρικά σημαίνει ότι: σε κάθε σημείο $x_o$ του Δ αντιστοιχεί ένα χωρίο $\Omega(x_o)$ που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=α και $x=x_o$ και είναι: $E(x_o)=F(x_o)=\int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt$.



- Το γεγονός ότι $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$ σημαίνει ότι ο ρυθμός αύξησης του εμβαδού $F(x)$ είναι ίσος με την τιμή της f στο x.
- Από το προηγούμενο θεώρημα και το θεώρημα σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται έχουν νόημα.
- Επίσης ισχύει: $\int f(x)dx = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + c$.

## <u>ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ</u>

Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β] , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α, β]. Επειδή η G είναι επίσης μια παράγουσα της f στο [α, β] θα υπάρχει $c \in \Re$ τέτοιο ώστε: $G(x) = F(x) + c$. (1).

Από την (1) για x=α , έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = 0 + c = c$. Αρα $c = G(\alpha)$.

Επομένως $G(x) = F(x) + G(\alpha)$. Αυτή η σχέση για x=β δίνει $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha)$ οπότε

$G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

# ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ο τύπος **ολοκλήρωσης κατά παράγοντες** για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot g(x)dx,$$

όπου f και g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

Ο τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$ όπου f και g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

# ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ- ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ- ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt.$ (f συνεχής στο π. ορισμού της)

1. **Αν h(x)=α και g(x)=x έχει τη μορφή** $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Αν $A_f$ το πεδίο ορισμού της f τότε το πεδίο ορισμού της F είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $A_f$ στο οποίο ισχύει $\alpha\in A_f$. Αν το $A_f$ είναι ένωση υποδιαστημάτων τότε βρίσκουμε εκείνο το υποδιάστημα στο οποίο ανήκει το α. Αυτό θα είναι το π. ορισμού της F.

Η $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ **είναι παραγωγίσιμη** με $F'(x)=f(x)$.

Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε $\int_{\alpha}^{\beta} F(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x)'F(x)dx=$

$$\left[xF(x)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} xF'(x)dx=\beta F(\beta)-\alpha F(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx.$$

2. **Αν h(x)=α και g(x) συνάρτηση του x, έχει τη μορφή** $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$

Αν $A_f$ το πεδίο ορισμού της f τότε το πεδίο ορισμού της F είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $A_f$ στο οποίο ισχύει $\alpha\in A_f$ και $g(x)\in A_f$

Η $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$ **είναι παραγωγίσιμη** με $F'(x)=f(g(x))g'(x)$

3. **Αν $h(x)=g_1(x)$ και $g(x)=g_2(x)$, έχει τη μορφή** $F(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt.$

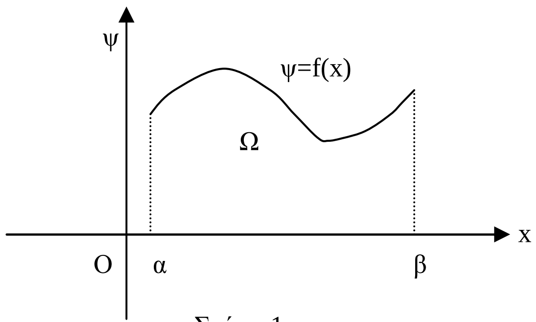
Αν $A_f$ το πεδίο ορισμού της f και Α το π. ορισμού της F τότε:
Αν το Α είναι ένωση διαστημάτων π.χ. $A=\Delta_1\cup\Delta_2$, τότε , επιλέγουμε έναν αριθμό α από το Α, οπότε $\alpha\in\Delta_1$ ή $\alpha\in\Delta_2$ και η F γράφεται στη μορφή

$F(x)=\int_{\alpha}^{g_2(x)} f(t)dt-\int_{\alpha}^{g_1(x)} f(t)dt$. Για εκείνα τα $x \in A_{g_1} \cap A_{g_2}$ απαιτούμε όπως $(g_1(x) \in \Delta_1$ και $g_2(x) \in \Delta_1)$ ή $(g_1(x) \in \Delta_2$ και $g_2(x) \in \Delta_2)$ οπότε προσδιορίζουμε το A.
Η παράγωγος της F είναι $F'(x)=f(g_2(x)) \cdot g_2'(x)-f(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$.

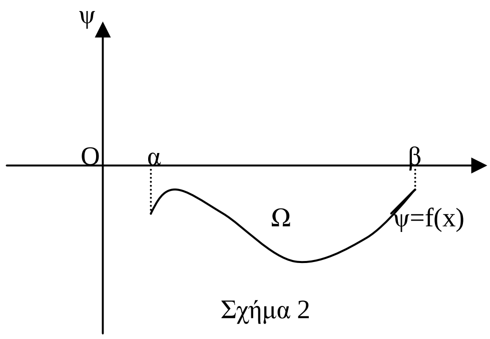
**4. Αν η F έχει τη μορφή** $F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} h(x,t) \cdot f(g(x,t))dt$ **όπου f, g, h συνεχείς στο A** τότε : για να βρούμε την παράγωγο της F, θέτουμε g(x,t)=u θεωρώντας το x ως σταθερά και εφαρμόζοντας μέθοδο αντικατάστασης παίρνουμε τελικά $F(x) = \phi(x) \cdot \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(u)du$ οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη μορφή.

## ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

**Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=α και x=β.**




Σχήμα 1

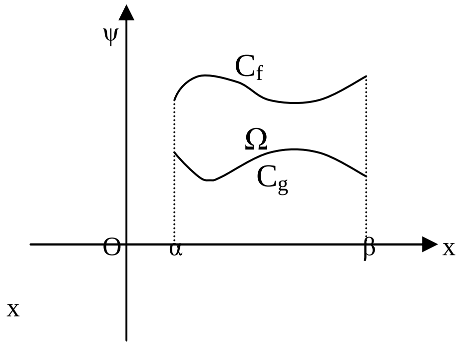



Σχήμα 2

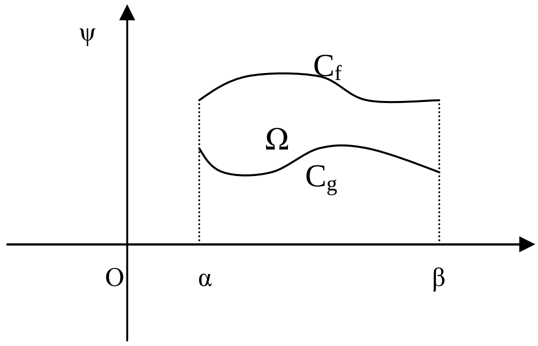
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και Ω το χωρίο που περικλείεται από την $C_f$ , τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=α και x=β. Τότε:

- Αν $f(x) \geq 0$ στο [α, β], θα είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (σχήμα 1)
- Αν $f(x) \leq 0$ στο [α, β], θα είναι $E(\Omega)= -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (σχήμα 2)
- Αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, β], τότε $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$.

**Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g**




Σχήμα 1




Σχήμα 2

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες x=α και x=β. Τότε:

- Αν $f(x) \geq g(x)$ στο [α, β], θα είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$ (σχήμα 1)
- Αν $f(x) \leq g(x)$ στο [α, β], θα είναι $E(\Omega)=\int_{a}^{\beta}\left(g(x)-f(x)\right)dx.$ (σχήμα 2)
- Αν η διαφορά f(x)-g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, β], τότε
- $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx.$

Στην περίπτωση ,λοιπόν , που ζητάμε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων και τις ευθείες x=α και x=β θα θεωρώ τη συνάρτηση φ(x)=f(x)-g(x) την οποία θα μελετώ ως προς το πρόσημό της κατασκευάζοντας τον πίνακα μεταβολής του προσήμου τοποθετώντας πάνω το διάστημα [α, β]. Αν $x_1$, $x_2$,….,$x_\nu$ οι ρίζες της φ(x) στο [α, β] το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι: $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{x_1}\left|f(x)\right|dx+\int_{x_1}^{x_x}\left|f(x)\right|dx+.........+\int_{x_\nu}^{\beta}\left|f(x)\right|dx.$

- Αν το Ω περικλείεται από την $C_f$ και τον άξονα χ΄χ χωρίς να αναφέρονται κατακόρυφες ευθείες τότε τα άκρα της ολοκλήρωσης θα είναι: $\alpha=x_1$ και $\beta=x_\nu$.

**Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών ή περισσοτέρων συναρτήσεων(ο άξονας χ΄χ θεωρείται συνάρτηση με τύπο f(x)=0 ), τότε:**

- Κατασκευάζουμε σχήμα υποχρεωτικά στο οποίο εμφανίζονται οι σχετικές θέσεις των καμπυλών των συναρτήσεων.
- Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των καμπυλών ανά δύο λύνοντας τα αντίστοιχα συστήματα. Οι τετμημένες των σημείων αυτών θα αποτελέσουν τα άκρα της ολοκλήρωσης.
- Βρίσκουμε το εμβαδόν του χωρίου με πρόσθεση ή αφαίρεση των ολοκληρωμάτων στα αντίστοιχα διαστήματα.

*******************

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $A=\int\left(3x^2-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)dx$ ii) $B=\int 18\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2dx$

iii) $\Gamma=\int(2\sqrt{x}+1+\varepsilon\varphi^2x)dx$ iv) $\Delta=\int\left(e^x-3\right)\left(2-e^{-x}\right)dx$

v) $E=\int\frac{x+2}{x+1}dx$ vi) $Z=\int\left[2\eta\mu(2x)+5\sigma\upsilon\nu(3x)-3\right]dx$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $A=\int\frac{dx}{\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ii) $B=\int\frac{\sigma\upsilon\nu^3x-\sigma\upsilon\nu^2x+3}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx$

iii) $\Gamma=\int 32\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2xdx$ iv) $\Delta=\int\frac{\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x}{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x}dx$

3. Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases}4x^3+1, & x\le 1\\ 6-x, & x>1\end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+2, & x\le 0\\ 3x^2+2, & x>0\end{cases}$

iii) $f(x)=\left|x^2-4\right|$ iv) $f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu(\pi x), & -1\le x\le 0\\ 2x+1, & x>0\end{cases}$

v) $f(x)=e^{|x-1|}$ vi) $f(x)=x|x|$

***************

4. Να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x)=24x^2+6x+1$ για κάθε $x\in\Re$ και έχει στο σημείο Α(-1, 1) κλήση 2.

5. Να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:
α) $f''(x)=12x-5$ για κάθε $x\in\Re$ και
β) παρουσιάζει στο $x_o=2$ τοπικό ακρότατο το 8.

6. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις οι οποίες σε οποιοδήποτε σημείο (x, f(x)) της γραφικής τους παράστασης έχουν κλήση $3x^2+2x$ για κάθε $x\in\Re$. Ποια από αυτές έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από το σημείο Α(-1, 1);

7. Να βρείτε συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\Re$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1, 1) και η εφαπτόμενή της σε οποιοδήποτε σημείο της Μ(x, f(x)) έχει κλήση ίση με $\frac{2}{x}$.

8. Να βρείτε συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν:
$f'(x)f(x)=e^x+2x$, για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=2$.

9. Να βρείτε συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν:
$f'(e^x)=x+1$, $x\in\Re$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο

A(1, e). Έπειτα να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

10. Να βρείτε συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$ αν $f'(\sqrt{x})=x^2 2^{\frac{-x\sqrt{x}}{3}}$, $x\geq 0$ και f(0)=4.

11. Να βρείτε συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει:
$f'(x)e^{f(x)}=1+\frac{1}{x}$ για κάθε x>0 και η $C_f$ έχει κλήση 2 στο σημείο της A(1, f(1)).

12. Να βρείτε συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύουν:
α) xf ΄(x)=2f(x) για κάθε x>0 και
β) f(x)>0 για κάθε x>0 και f(1)=2.

13. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε η συνάρτηση F(x)=x(αlnx+β), x>0 να είναι αρχική της συνάρτησης f(x)= -lnx για κάθε x>0.

14. Έστω f και g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\Re$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:
i) f(0)=2g(0) ii) f(x)>0 για κάθε x στο $\Re$ και iii) f(x)g΄(x)=f΄(x)g(x), x στο $\Re$.
α) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\frac{1}{2}f(x),\ x\in\Re$
β) Να βρείτε τις αρχικές της συνάρτησης $G(x)=f(x)g'(x)$ στο $\Re$.

****************

15. Ο ρυθμός αύξησης της ακτίνας R(x) μίας κυκλικής πετρελαιοκηλίδας δίνεται από τον τύπο: $R'(x)=10^{-5}x^3(80/3-x)$ όπου χ η ταχύτητα του ανέμου σε km/h και $x\in[0,25]$.
α) Να βρείτε την ταχύτητα του ανέμου ώστε ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας R(x) να γίνεται μέγιστος.
β) Να βρείτε κατά πόσα km θα αυξηθεί η ακτίνα της πετρελαιοκηλίδας, αν η ταχύτητα του ανέμου αυξηθεί από 10km/h που είναι σε 20km/h.

16. Ο ρυθμός αύξησης της αξίας ενός μηχανήματος δίνεται από τον τύπο
$P'(t)=-\frac{P_0}{2}t\cdot 2^{-\frac{t^2}{4}}\ln 2$ ευρώ ανά έτος, όπου $P_o$ είναι η αρχική τιμή του σε ευρώ και t ο χρόνος σε έτη.
α) Σε πόσο χρόνο περίπου ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του μηχανήματος γίνεται ελάχιστος;
β) Να βρείτε την τιμή του μηχανήματος μετά από 2 έτη.

17. Μια εταιρία εισάγει μια νέα μέθοδο κατασκευής των προϊόντων της. Η οικονομία που θα έχει η εταιρία από τη νέα μέθοδο μεταβάλλεται με ρυθμό που δίνεται από τη συνάρτηση P΄(t)=1000(t+2) (σε ευρώ και t ο χρόνος που η νέα μέθοδος είναι σε χρήση).

α) Να βρείτε τις συνολικές οικονομίες κατά τη διάρκεια i) του πρώτου χρόνου ii) των έξι πρώτων χρόνων.
β) Υποθέτουμε ότι η νέα μέθοδος κοστίζει 51000 ευρώ. Πότε περίπου θα γίνει η απόσβεση της νέας μεθόδου;

18. Ένας αγρότης χρησιμοποιεί ένα νέο λίπασμα που δίνει ένα καλύτερο αποτέλεσμα. Επειδή όμως εξαντλεί το έδαφος από άλλα συστατικά, πρέπει να χρησιμοποιήσει άλλα λιπάσματα σε μεγάλες ποσότητες, έτσι ώστε το κόστος να ανεβαίνει κάθε χρόνο. Το νέο λίπασμα αυξάνει το εισόδημα με ρυθμό που δίνεται από τη συνάρτηση $f'(t)=-3t^2+10t+70$ ( σε ευρώ και t ο χρόνος σε έτη). Ο ετήσιος ρυθμός του κόστους από τη χρήση του νέου λιπάσματος δίνεται από τη συνάρτηση $g'(t)=2t+10$ (σε ευρώ).
α) Πόσο χρόνο μπορεί ο αγρότης να χρησιμοποιεί το νέο λίπασμα;
β) Ποιο είναι το κέρδος στο τέλος αυτής της περιόδου;

19. Μία νέα γεώτρηση εξόρυξης πετρελαίου έχει ρυθμό άντλησης ο οποίος δίνεται από τον τύπο $R'(t)=20+10t-\frac{3}{4}t^2$, οπου $R(t)$ είναι ο αριθμός, σε χιλιάδες των βαρελιών που αντλήθηκαν στους t τελευταίους μήνες λειτουργίας της. Να βρείτε πόσα βαρέλια θα έχουν αντληθεί στους 8 πρώτους μήνες λειτουργίας της γεώτρησης.

***************

20. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ και F μια αρχική της f στο $\Re$. Αν η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}F(x)$, $x\in\Re$ δεν είναι συνάρτηση 1-1, να αποδείξετε ότι:
α) Μπορεί να εφαρμοστεί το θ. Rolle για την g σε κάποιο υποδιάστημα του $\Re$.
β) Υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_o\in\Re$ τέτοιος, ώστε: $f(x_o)=e^{x_0}g(x_0)$.

21. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ και F μια αρχική της f στο $\Re$. Αν η f είναι περιττή να αποδείξετε ότι η F είναι άρτια και αντιστρόφως.

22. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο [-1, 1] και F μια αρχική της f στο [-1, 1] για την οποία ισχύει: $F(-1)=F(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_o\in(-1, 1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o)=x_o$.

23. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ και F μια αρχική της f στο $\Re$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύει:
$f(0)=2$, $F(x)>0$ στο $\Re$ και $f(x)F(-x)=1$ στο $\Re$.
α) Να βρείτε το F(0)
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο $\Re$ και να βρείτε τον τύπο της.
γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

***************

## Παραγοντική ολοκλήρωση

24. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int x^2 συνx dx$ ii) $\int x e^{5x} dx$ iii) $\int (x+xημx) dx$

iv) $\int \sqrt{x^3} \ln x dx$ v) $\int x^2 e^{-x} dx$ vi) $\int x^3 συν2x dx$

vii) $\int e^{2x} ημx dx$ viii) $\int (x^2+x) e^{2x} dx$ ix) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

25. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \ln x dx$ ii) $\int (\ln x)^3 dx$ iii) $\int \frac{x}{συν^2 x} dx$

iv) $\int \frac{x}{ημ^2 x} dx$ v) $\int e^{-3x} συν2x dx$ vi) $\int xεφ^2 x dx$

26. Να βρείτε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$ αν το σημείο Α(1, ¾) είναι σημείο καμπής της f και για κάθε x>0 ισχύει: $f'(x)=x(2+α-\ln x)$, $α\in \Re$.

27. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int x^2 \ln(x+1) dx$ ii) $\int 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$ iii) $\int \ln(1-x^2) dx$

iv) $\int x e^{x+\ln x} dx$ v) $\int \frac{x+1}{e^x} dx$ vi) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

28. Αν $I=\int 2xημ^2 x dx$ και $J=\int 2xσυν^2 x dx$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα I+J, I-J, I, J.

29. α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$, x>2.

β) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $A=\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx$ και $B=\int \sqrt{x^2-4} dx$.

****************

## Αντικατάσταση μεταβλητής

30. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int (2x+1)^{2006} dx$ ii) $\int 3e^{2x+5} dx$ iii) $\int 3ημ(2-4x) dx$

iv) $\int 3x e^{x^2-2} dx$ v) $\int (4x-2)(x^2-x+7)^5 dx$ vi) $\int x^3 e^{x^2+1} dx$

31. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^5}dx$ ii) $\int \frac{1+\ln x}{\sqrt{3+x\ln x}}dx$ iii) $\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu e^{2x}dx$

iv) $\int \frac{\sigma\varphi x}{\ln(\eta\mu x)}dx$ v) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx$ vi) $\int x^3\sqrt{2-x}dx$

32. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ ii) $\int x\sqrt{1+x}dx$ iii) $\int x^3\sigma\upsilon\nu(x^2+1)dx$

iv) $\int \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x\sqrt{x}}dx$ v) $\int \frac{3e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ vi) $\int \frac{2\ln x-\sqrt{\ln x}}{x\ln x}dx$

vii) $\int e^{e^x}e^x dx$ viii) $\int \eta\mu\sqrt{x+3}dx$ ix) $\int \sigma\upsilon\nu^3 x\ln(\eta\mu x)dx$

*****************

## Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

33. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{x+5}{x+2}dx$ ii) $\int \frac{x}{3x-4}dx$ iii) $\int \frac{x^3-8}{x-2}dx$

iv) $\int \frac{x^2}{x+4}dx$ v) $\int \frac{e^x+1}{e^x+3}dx$ vi) $\int \frac{e^{2x}-4}{e^x+1}dx$

34. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{1}{x^2-16}dx$ ii) $\int \frac{1}{x^2+x}dx$ iii) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$

iv) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$ v) $\int \frac{2x-4}{x^2-3x+2}dx$ vi) $\int \frac{x^3+1}{x^2-4x+3}dx$

vii) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^2-3x+2}dx$ viii) $\int \frac{3}{2x^2-5x+3}dx$ ix) $\int \frac{x^5}{x^2-2x+1}dx$

35. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{3\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x-7\sigma\upsilon\nu x+10}dx$ ii) $\int \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu^2 x+3\eta\mu x-5}dx$

36. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+3}dx$ ii) $\int \frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}-4}dx$

37. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ ii) $\int \frac{1}{x+5}\cdot\sqrt{\frac{x}{x+5}}dx$ iii) $\int \frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{\sqrt{\varepsilon\varphi x}}dx$

## Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

38. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \varepsilon\varphi x dx$ ii) $\int \sigma\varphi^2 x dx$ iii) $\int \varepsilon\varphi^3 x dx$ iv) $\int \varepsilon\varphi^4 x dx$

v) $\int \eta\mu^2 x dx$ vi) $\int \sigma\upsilon\nu^4 x dx$ vii) $\int \eta\mu^3 x dx$ viii) $\int \sigma\upsilon\nu^5 x dx$

39. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$ ii) $\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$ iii) $\int \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx$

iv) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x} dx$ v) $\int \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x dx$ vi) $\int \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx$

40. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int x\eta\mu^{2x} x dx$ ii) $\int e^x \eta\mu^2 x dx$ iii) $\int \frac{x}{\eta\mu^2 x} dx$

iv) $\int x\varepsilon\varphi^2 x dx$ v) $\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x} dx$ vi) $\int \frac{x\text{-}\eta\mu x}{1\text{-}\sigma\upsilon\nu x} dx$

41. Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $A=\int \eta\mu x \times \ln(1+\eta\mu x) dx$.

*****************

## Αναγωγικοί τύποι

42. Αν $I_\nu = \int x(\ln x)^\nu dx,\ \nu \in N^*$ να αποδειχθεί ότι:

i) $2I_{\nu+1} + (\nu+1)I_\nu = x^2(\ln x)^{\nu+1},\ \nu \in N^*$.

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I_3$.

43. i) Αν $I_\nu = \int x^\nu \sigma\upsilon\nu x dx,\ \nu \in N^*$ να αποδειχθεί ότι:

$I_{\nu+1} = x^{\nu+1}\eta\mu x + (\nu+1)x^\nu \sigma\upsilon\nu x - \nu(\nu+1)I_{\nu-1},\ \nu \geq 2\ \ \nu \in N^*$.

ii) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $I_{1,}\ I_{3,}\ I_5$.

44. Αν $I_\nu = \int \varepsilon\phi^\nu x dx,\ \nu \in N^*$, να αποδειχθεί ότι: $I_\nu = \frac{1}{\nu-1}\varepsilon\phi^{\nu-1}x - I_{\nu-2},\ \nu \geq 3$.

45. Αν $I_\nu = \int \frac{e^{ax}}{x^\nu} dx,\ \nu \in N^*,\ a \neq 0,$ να αποδειχθεί ότι $I_{\nu+1} = \frac{a}{\nu} I_V - \frac{e^{ax}}{\nu x^\nu},\ \nu \in N^*$.

46. Αν $I_\nu = \int \ln^\nu x dx,\ \nu \in N^*$ *να δείξετε ότι* $I_\nu = x\ln^\nu x - \nu I_{\nu-1},\ \ \nu \geq 2$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_3 = \int \ln^3 x dx$.

47. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $A=\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}dx$ ii) $B=\int \frac{1}{3+5\eta\mu x}dx$ iii) $\Gamma=\int \frac{1}{\eta\mu 2x\cdot(1-\varepsilon\varphi x)}dx$

iv) $\Delta=\int \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}\cdot \eta\mu^5 x dx$ v) $E=\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x+1-\sqrt{x+1}}dx$ vi) $Z=\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$

48. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $A=\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}dx$ ii) $B=\int \frac{x+\sqrt[4]{x+3}}{\sqrt{x+3}}dx$ iii) $\Gamma=\int \frac{1}{3+2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}dx$

49. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu 3x dx$ ii) $\int \sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu 3x dx$ iii) $\int \eta\mu x\eta\mu 2x dx$

50. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για την οποία ισχύει:

i) $f'(x)=x-f(x),\ x\in\Re$ και $f(0)=1$

ii) $2f'(x)=x+f(x),\ x\in\Re$ και $f(0)=0$

iii) $f''(x)=\frac{1-f'(x)}{x},\ x>0$ και $f'(1)=f(1)=0$

iv) $f''(x)=\frac{f'(x)}{x}+xe^x,\ x>0$ και $f'(1)=e,\ f(1)=0$

51. Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f'(1)=2,\ f(1)=1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε x>0 ισχύει: $x^2f''(x)=2f(x)$.

α) Να δείξετε ότι η $f''$ είναι συνεχής.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

******************

## Ορισμένο ολοκλήρωμα

52. Αν $f$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\Re$ και ισχύουν:

$$\int_7^4 f(x)dx=-2,\quad \int_0^9 f(x)dx=6,\quad \int_0^{10} f(x)dx=8,\quad \int_4^9 f(x)dx=5$$

να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_9^{10} f(x)dx,\quad \int_0^4 f(x)dx,\quad \int_7^9 f(x)dx.$$

53. Αν $f$ *είναι* συνεχής συνάρτηση στο $\Re$ και ισχύουν:

$$\int_1^3 f(x)dx=1\quad \int_2^5 f(x)dx=2\quad \int_2^3 f(x)dx=3$$

να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_3^2 f(x)dx\quad \kappa\alpha\iota\quad \int_1^5 f(x)dx.$$

54. Αν $f$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\Re$ και ισχύουν:

$$\int_1^3 f(x)dx = 5, \quad \int_5^7 f(x)dx = -3 \quad \kappa\alpha\iota \quad \int_3^7 f(x)dx = 4$$

να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_7^5 f(x)dx \quad \int_3^5 f(x)dx \quad \kappa\alpha\iota \quad \int_5^1 f(x)dx.$$

55. Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\Re$, να γραφούν στη μορφή $\int_a^\beta f(x)dx$ οι παραστάσεις:

$$i) \int_{-3}^5 f(x)dx + \int_5^2 f(x)dx + \int_2^{10} f(x)dx$$

$$ii) \int_{-4}^0 f(x)dx - \int_{-4}^{10} f(x)dx - \int_0^{20} \left(-f(x)\right)dx$$

56. Να αποδείξετε ότι $3\int_{-6}^2 \frac{x^2+6}{x^2+9}dx - 9\int_2^{-6} \frac{1}{x^2+9}dx = 24.$

57. Να υπολογίσετε την τιμή του κ $\in \Re$ για την οποία ισχύει:

$$2\int_{-4}^{\kappa} \frac{x^2}{3x^2+12}dx - \int_{\kappa}^{-4} \frac{8}{3x^2+12}dx = 1.$$

58. Αν οι συναρτήσεις $f$ και g είναι συνεχείς στο [2, 5] και ισχύουν:

$\int_3^5 3f(x)dx = -15 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \int_5^3 g(x)dx = -4,$ να υπολογιστούν τα

ολοκληρώματα: $i) \int_3^5 4g(x)dx \qquad ii) \int_3^5 \left(5g(x) - 2f(x) - 8\right)dx$

59. Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\Re$ και ισχύει:

$\int_a^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(x)dx,$ να αποδείξετε ότι $\int_a^\gamma f(x)dx = \int_\beta^\delta f(x)dx.$

60. Αν $A = \int_1^5 \frac{e^x}{e^x+x^2}dx \;\; \kappa\alpha\iota \;\; B = \int_1^5 \frac{x^2}{e^x+x^2}dx,$ να υπολογίσετε το άθροισμα

Α+Β. Κατόπιν δείξτε ότι $\int_1^5 \frac{e^x}{e^x+x^2}dx \cdot \int_1^5 \frac{x^2}{e^x+x^2}dx \leq 4.$

61. Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2], να αποδείξετε ότι:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3 + \left(\int_1^2 f(x)dx\right)^3 + \left(\int_2^0 f(x)dx\right)^3 =$$

$$= 3 \cdot \left(\int_0^1 f(x)dx\right) \cdot \left(\int_1^2 f(x)dx\right) \cdot \left(\int_2^0 f(x)dx\right)$$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα Ouler : αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.)

***************

## Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων

62. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $A=\int_1^e \eta\mu\ln x dx$ ii) $B=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx$ iii) $\Gamma=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx$

iv) $\Delta=\int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$ v) $E=\int_1^2 \ln^2 x dx$ vi) $Z=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sigma\upsilon\nu x dx$

63. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $A=\int_1^4 \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$ ii) $B=\int_1^{64} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ iii) $\Gamma=\int_1^8 x\sqrt{x+1}dx$

iv) $\Delta=\int_3^8 \frac{2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$ v) $E=\int_1^e \frac{\ln x}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}dx$ vi) $Z=\int_2^5 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

64. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^1 \left(x^2+1+\sigma\upsilon\nu(\pi x)\right)dx$ ii) $\int_0^1 \frac{x+1}{e^x}dx$ iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}dx$

iv) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x}dx$ v) $\int_0^{\pi} e^x\eta\mu x dx$ vi) $\int_0^{\pi} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

65. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2 x dx$ iii) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^3 x dx$

iv) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx$ v) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx$ vi) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

vii) $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x dx$ viii) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx$ ix) $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}dx$

66. Δίνονται τα ολοκληρώματα $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu^2 x dx$ και $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx.$
Να υπολογίσετε τα : Β+Α, Β-Α, Α και Β.

67. Δίνονται τα ολοκληρώματα $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}dx$ και $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}dx.$
Να υπολογίσετε τα : Β+Α, Β-Α, Α και Β.

68. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x-ex, & x\le 1 \\ x\ln x, & x>1 \end{cases}.$
α) Να δείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
β) Να υπολογίσετε το $I=\int_0^2 f(x)dx.$

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x<0 \\ \ln(x+1), & x\ge 0 \end{cases}.$
Να υπολογίσετε το $I=\int_{-1}^2 f(x)dx.$

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \varepsilon\phi^2 x, & x<0 \\ x\eta\mu x, & x\ge 0 \end{cases}.$
Να υπολογίσετε το $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$

71. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
$i)\ \int_0^2 (|x-1|+x)dx$ $\quad ii)\ \int_0^2 (|x^2-1|+x)dx$
$iii)\ \int_{-1}^1 |e^x-1|dx$ $\quad iv)\ \int_{\frac{1}{2}}^2 (x|\ln x|)dx$

72. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
i) $\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$ ii) $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$ iii) $\int_2^3 \frac{2}{x^2+3x}dx$
iv) $\int_0^1 \frac{x^3-2x+3}{x^2-4}dx$ v) $\int_{-1}^0 \frac{x-1}{x^2-3x+2}dx$ vi) $\int_0^1 \frac{x+4}{x^2-5x+6}dx$

*****************

## Θεωρητικές στην παραγοντική ολοκλήρωση

73. Έστω συνάρτηση f με f΄΄ συνεχή στο διάστημα [α, β] και f(α)=f(β).
Να αποδειχθεί ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} x f''(x)dx=\beta\, f'(\beta)-\alpha\, f'(\alpha).$

74. Έστω δύο συναρτήσεις f και g με συνεχείς τις f΄΄(x) και g΄΄(x) στο $\Re$. Αν ισχύει ότι: f(α)=f(β)=g(α)=g(β)=0, να αποδειχθεί ότι:

$$\int_{a}^{\beta} f''(x)g(x)dx = \int_{a}^{\beta} f(x)g''(x)dx.$$

75. Η συνάρτηση f έχει συνεχή τρίτη παράγωγο στο [0, 1] και ισχύει: f΄(0)=f΄΄(1)=0. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{0}^{1}\left[(f''(x))^2 + f'(x)f'''(x)\right]dx$$

76. Η συνάρτηση f ΄΄ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και f ΄(0)=-3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(f'(x)\eta\mu x - f''(x)\sigma\upsilon\nu x\right)dx.$$

77. Η συνάρτηση $f$ έχει συνεχή παράγωγο στο [0, 1] και ισχύουν $f(0)=f(1)=0$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$i)\ I = \int_{0}^{1}\left(f(x) + f'(x)\right)e^{x}dx$$

$$ii)\ I = \int_{o}^{1}\frac{f(x) - f'(x)}{e^{x}}dx$$

78. Αν η συνάρτηση f έχει f΄΄ συνεχή στο [0, 1] και ισχύει f(1)=f΄(1)=2 και f(0)=0, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{0}^{1} x^3 f''(x^2)dx.$$

79. Έστω μια συνάρτηση f με f΄΄ συνεχή για την οποία ισχύει:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(f(x)+f''(x))\sigma\upsilon\nu x dx=2.$$ Αν $f(\frac{\pi}{2})=1$ να υπολογίσετε την f΄(0).

80. Έστω μια συνάρτηση f με f΄΄ συνεχή στο $\Re$. Αν οι εφαπτόμενες της $C_f$ στα σημεία $x_1=\alpha$ και $x_2=\beta$ σχηματίζουν με τον άξονα χ΄χ γωνία $135^o$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{a}^{\beta} f'(x)f''(x)dx.$

****************

## Θεωρητικές στην αντικατάσταση μεταβλητής

81. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\Re$. Να αποδειχθεί ότι:

$$i)\ \int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$ii)\ \int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right)dx=\gamma\int_{a}^{\beta} f(x)dx,\ \ \gamma \neq 0$$

$$iii)\ \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

82. Να αποδείξετε ότι:

$i)\ \int_1^e \frac{\mathrm{f}(\ln x)}{x}dx = \int_0^1 \mathrm{f}(x)\,dx$ $\qquad$ ii) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\, \mathrm{f}(1-e^x)dx = \int_{-2}^{-1}\mathrm{f}(x)\,dx$

83. Αν $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{f}(2x-1)\,dx = 1,$ να υπολογίσετε το $I = \int_0^{-1}\mathrm{f}(x)\,dx.$

84. Αν η συνάρτηση $\mathrm{f}: \Re \to \Re$ είναι συνεχής και αντιστρέψιμη και θεωρήσουμε γνωστό ότι η $\mathrm{f}^{-1}$ είναι και αυτή συνεχής στο $\mathrm{f}(\Re) = \Re,$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta x\mathrm{f}'(x)dx = \int_{\mathrm{f}(\alpha)}^{\mathrm{f}(\beta)} \mathrm{f}^{-1}(x)dx.$$

85. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ=[0, α] και γνησίως αύξουσα. Αν f(Δ) =[0, β] και θεωρηθεί γνωστό ότι η $\mathrm{f}^{-1}$ είναι συνεχής στο [0, β] να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^\alpha \mathrm{f}(x)\,dx + \int_0^\beta \mathrm{f}^{-1}(x)dx = \alpha\beta.$$

86. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει: f(x)+f(α+β-x)=c, $x \in [\alpha, \beta]$ όπου c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)\,dx = (\beta-\alpha)\,\mathrm{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}\left[\mathrm{f}(\alpha)+\mathrm{f}(\beta)\right].$$

87. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και ισχύει: f(x)+f(1-x)=2, $x \in \Re,$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \mathrm{f}(x)\,dx.$

88. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και ισχύει: f(x-1)+f(2-x)=2, $x \in \Re,$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \mathrm{f}(x)\,dx.$

89. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και ισχύει αf(x)+βf(-x)=γ, $\alpha \neq -\beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^1 \mathrm{f}(x)\,dx = \frac{2\gamma}{\alpha+\beta}.$$

90. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}.$

i) Να δείξετε ότι: f(x)+f(-x)=συνx για κάθε $x \in \Re$.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x)\,dx.$

91. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και ισχύει f(x)-f(α+β-x)=0, να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} x\,\mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx}$ και με τη βοήθεια της της σχέσης να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx.$

92. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και για κάθε x και ψ $\in \Re$ ισχύει: f(x+ψ)=f(x)+f(ψ)+xημψ+ψημx

I) Να δείξετε ότι f(x)+f(-x)=2xημx, $x\in\Re$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx}$.

93. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και ισχύει f(α-x)+f(α+x)=β για κάθε $x\in\Re$ (α,β πραγματικοί αριθμοί) να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{2\alpha} \mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx} = \alpha\beta.$$

94. Αν οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] και για κάθε x στο [α, β] ισχύει: f(x)+f(α+β-x)=g(x)+g(α+β-x) να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{g(x)}\,\mathrm{dx}.$$

95. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-1, 1] και άρτια, να αποδείξετε ότι:

$i)$ $\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$

$ii)$ $\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{f}(\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$

96. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο [-α, α] τέτοιες ώστε η f να είναι άρτια και η g να είναι περιττή στο [-α, α] να δείξετε ότι:

$i)$ $\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx} = 2\int_0^{\alpha}\mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx}$ ii) $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = 0.$

97. i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-1, 1], να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}.$$

$ii)$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi}\frac{x\eta\mu x}{3\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x}dx.$$

****************

## Αναγωγικοί τύποι στο ορισμένο ολοκλήρωμα

98. Αν $I_\nu = \int_0^\pi e^{-x}\eta\mu^\nu x dx,$ $\nu\alpha$ $\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon$ $\acute{o}\tau\iota$ $(\nu^2+1)\mathrm{I}_\nu = \nu(\nu-1)\mathrm{I}_{\nu-2}$ $\nu \geq 2$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}_4 = \int_0^\pi e^{-x}\eta\mu^4 x dx.$

99. Αν $I_\nu = \int_1^e \ln^\nu x dx,$ $\nu \in N^*,$ $\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\tau\varepsilon$ $\acute{o}\tau\iota$ $\mathrm{I}_\nu = e - \nu \mathrm{I}_{\nu-1},$ $\nu \geq 2.$

100. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx,$ $\nu \in \mathrm{N}^*,$ $\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\tau\varepsilon$ $\acute{o}\tau\iota$ $\mathrm{I}_\nu = \dfrac{1}{\nu-1} - \mathrm{I}_{\nu-2},$ $\nu \geq 2.$

101. $A\nu$ $I_\nu = \int_1^2 x(\ln x)^\nu dx,$ $\nu \in \mathrm{N}^*,$ $\nu\alpha$ $\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon$ $\acute{o}\tau\iota$ $\gamma\iota\alpha$ $\nu \geq 1$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$
$2\mathrm{I}_\nu + \nu\mathrm{I}_{\nu-1} = 4(\ln 2)^\nu$ $\kappa\alpha\iota$ $\nu\alpha$ $\upsilon\pi o\lambda o\gamma\acute{\iota}\sigma\varepsilon\tau\varepsilon$ $\tau o$ $\int_1^2 x(\ln x)^3 dx.$

****************

### Ανισότητες και ορισμένο ολοκλήρωμα

102. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει f΄΄(x)>0 στο διάστημα [α, β]. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\mathrm{f(x)} - \mathrm{f}(\alpha) \leq \mathrm{f}'(\beta)(\mathrm{x}-\alpha)$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $\mathrm{x} \in [\alpha,\beta].$

β) $2\int_\alpha^\beta \mathrm{f(x)dx} \leq \mathrm{f}'(\beta)(\beta-\alpha)^2 + 2\mathrm{f}(\alpha)(\beta-\alpha).$

103. Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο [0, 1] για την οποία ισχύει:
$\int_0^1 \mathrm{f(x)dx} = 0$ και α<f(x)<β για κάθε $\mathrm{x} \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι:

$a)$ $[\mathrm{f(x)}]^2 - (\alpha+\beta)\mathrm{f(x)} + \alpha\beta < 0$ και β) $\int_0^1 [\mathrm{f(x)}]^2 dx < -\alpha\beta.$

104. Έστω f και g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο [α, β] και για κάθε $\mathrm{x} \in$ [α, β] ισχύει $\mathrm{f(x)} \geq \mathrm{g(x)}$. Α$\nu$ $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ $\mathrm{x}_0 \in [\alpha,\beta]$ $\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $\mathrm{f(x_0)} \neq \mathrm{g(x_0)}$ να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta \mathrm{f(x)dx} > \int_\alpha^\beta \mathrm{g(x)dx}.$

105. α) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο [α, β]. Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο [α, β], να αποδείξετε ότι:

$$m(\beta-\alpha)\le\int_a^{\beta}\mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx}\le \mathrm{M}(\beta-\alpha).$$

β) Δείξτε ότι: $1\le\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx\le\sqrt{2}.$

106. Δείξτε ότι :

α) ημx$\le x$ $για\ \ κάθε\ \ x\in[0,1]$

β) $\int_0^1\frac{2\eta\mu x}{x^2+1}dx\le\ln 2.$

107. Να αποδείξετε ότι:

$i)\ 12\le\int_0^4\sqrt{x^2+9}dx\le 20,\ \ x\in[0,4]$

$ii)\ 1\le\int_o^1 e^{x^2}dx\le e,\quad x\in[0,1]$

$iii)\ 2\le\int_{-1}^1\sqrt{1+x^4}dx\le\frac{8}{3},\ \ x\in[-1,1]$

108. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] και δεν είναι σταθερή σε αυτό, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1[\mathrm{f(x)}]^2dx>2\int_0^1\mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx}-1.$$

109. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$, να αποδείξετε ότι:

$$-\sqrt{3}\le\int_0^{\sqrt{3}}\left[\mathrm{f(x)}\right]^2dx+2\int_{\sqrt{3}}^0\mathrm{xf(x)}\,\mathrm{dx}.$$

110. Να αποδείξετε ότι:

$i)\ \frac{\beta-\alpha}{e^{\beta}}\le\int_{\alpha}^{\beta}e^{-x}dx\le\frac{\beta-\alpha}{e^{a}},\quad 0<a<\beta.$

$ii)\ \int_0^1 x^2\eta\mu x dx\le\frac{1}{3}$

$iii)\ 1\le\int_0^1 2^x dx\le 2$

$iv)\ \int_0^1 x^4\sigma\upsilon\nu^2 x dx\le-\int_1^0 x^4dx$

111. Να αποδείξετε ότι:

$i)\ \frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}\ \ για\ \ κάθε\ \ \chi>0$ $\qquad ii)\ \int_1^{17}x^e dx<\int_1^{17}e^x dx.$

112. Αν $\mathrm{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{5-\sigma\upsilon\nu^2 x}},\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{f(x)}\,\mathrm{dx}\le\frac{\pi}{4}.$$

*****************

## Πεδίο ορισμού-Παράγωγος-Ολοκλήρωμα

113. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

$i)\ F(x)=\int_1^x \frac{1}{t-2}dt \qquad ii)\ F(x)=\int_1^x \sqrt{2t^2-t-1}dt \qquad iii)\ F(x)=\int_{3/2}^{\sqrt{2-x}} \frac{3-t}{\ln(t-1)}dt$

$iv)\ F(x)=\int_{4-x}^{\ln x} \sqrt{t-1}dt \qquad v)\ F(x)=\frac{x-1}{x-3}+\int_1^{\sqrt{x}} e^{t+1}\sqrt{4-t^2}dt$

$vi)\ F(x)=\int_{\frac{1}{x-1}}^{x-2} t^2\ln t^2 dt \qquad vii)\ F(x)=\int_{x-1}^{x-2} \frac{\ln(t-1)}{\sqrt{5-t}}dt \qquad viii)\ F(x)=\int_{\ln x}^{e^x-1} \sqrt{1-t^2}dt$

114. Αν F(x)= $\int_0^{x^2} (x^2-x+1)\,\mathrm{f(t)}\,\mathrm{dt},\ \mathrm{x}\in\Re$ και f συνάρτηση συνεχής στο $\Re$, να βρείτε την F΄(x).

115. Έστω η συνάρτηση F(x)= $\int_1^{\sqrt{x}} t^3\ln(4+3t^3)dt,\ x\geq 0$.

α) Δείξτε ότι η F είναι συνεχής στο $x_o=1$.
β) Βρείτε την παράγωγο της F.

116. Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

$i)\ f(x)=\int_1^x (2x+4)\sigma\upsilon\nu t\,dt \qquad ii)\ f(x)=e^{2x-1}+\int_1^x (t-x)e^t dt$

$iii)\ f(x)=\int_0^x 2x^3\left(\int_2^t \sqrt{u^2+2u+7}\,du\right)dt$

117. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$i)\ f(x)=2x+x^2\int_0^1 \eta\mu(xt)dt, \quad x\in\Re.$

$ii)\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}-(x-1)\int_1^x \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{t}\right)dt,\ x\in(0,+\infty)$

$iii)\ f(x)=3\ln\frac{1}{x}+x\int_1^{\frac{1}{2}} \ln(2xt)dt, \quad x\in(0,+\infty)$

118. Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα Δ, να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$i)\ h(x)=\int_1^3 f(3x-2t)dt, \quad \Delta=\Re$

$ii)\ h(x)=x^2+1-x\int_0^1 f(xt)dt,\ \Delta=[0,+\infty)$

$iii)\ h(x)=\ln x+\int_1^x \frac{x^2}{t^3} f\left(\frac{x}{t}\right)dt,\ \Delta=(0,+\infty)$

$iv)\ h(x)=\int_0^1 f(2t-x)dt+x\int_1^x f(x-t)dt,\ \Delta=\Re$

119. Έστω η συνάρτηση F(x)=$\int_1^x e^{t^2}\,dt$. Να βρείτε το ολοκλήρωμα I=$\int_0^1 F(x)dx$.

120. Έστω η συνάρτηση F(x)=$\int_2^x \eta\mu t^2 dt$. Να βρείτε το ολοκλήρωμα I=$\int_0^2 F(x)dx$.

121. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$i)\ A=\int_0^1\left(\int_1^x \frac{3x^2}{1+t^2}dt\right)dx$ $\qquad ii)\ B=\int_0^{\pi}\left(\int_{\pi}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3+\eta\mu^2 t}dt\right)dx.$

****************

## Σταθερή συνάρτηση-υπολογισμός τιμής

122. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F(x)=$\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{t+\ln t}{t^2+1}dt-\ln x$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της.

123. Δίνεται η συνάρτηση F: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\Re\ \mu\varepsilon\ F(x)=\int_1^{\varepsilon\varphi x}\frac{t}{1+t^2}dt+\int_1^{\sigma\varphi x}\frac{1}{t(1+t^2)}dt$

Δείξτε ότι είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

124. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση με π. ορισμού το διάστημα $[0,+\infty)$ τέτοια ώστε: $2\int_0^x f(t)\,dt = xf(x),\ \ x\geq 0.$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\int_0^x f(t)\,dt$ είναι σταθερή.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

125. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση με π. ορισμού το διάστημα $[0,+\infty)$ τέτοια ώστε: f(1+x)+f(1-x)=2x για κάθε $x\in\Re$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=$\int_{1-x}^{1+x}f(t)\,dt - x^2$ είναι σταθερή.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $A=\int_0^2 f(t)\,dt$.

126. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ *και ισχύει* $f(x)=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\,du\right)dt$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f'(x))^2-f^2(x)$ είναι σταθερή.

127. Αν $g(t)=\eta\mu t\eta\mu\frac{1}{t}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ F(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}g(t)dt+\int_1^x\frac{g(t)}{t^2}dt$ να αποδείξετε ότι η F είναι σταθερή στο διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της.

128. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $F(x)=\int_0^x e^{\sqrt{1+t^2}}dt-\int_1^{x+1} e^{\sqrt{t^2-2t+2}}dt$ είναι σταθερή στο $\Re$ και να βρείτε την τιμή της.

*******************

## Εύρεση του τύπου συνάρτησης

129. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$. Αν για κάθε x>0 ισχύει: $\int_1^{x^2} x\,\mathrm{f(t)\,dt}=\mathrm{x-1+lnx}$, να βρείτε το f(1).

130. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$. Αν ισχύει:

$$x+\int_0^x \mathrm{f(t)\,dt=(x+1)\,f(x),\ x\geq 0}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

131. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ και τον αριθμό α όταν:

$i)\ \int_a^x \mathrm{f(t)\,dt}=\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{x}-1,\ \alpha\in[0,\pi]$

$ii)\ \int_a^x \mathrm{f(t)\,dt=x^3+1}.$

132. Δίνεται συνάρτηση f με f ΄΄ συνεχή στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και για κάθε x στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ να ισχύει: $\int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt=x-\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt$. Αν f(0)=1 και f ΄(0)=0, να βρείτε τον τύπο της f.

133. Δίνεται συνάρτηση f με f ΄΄ συνεχή στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύουν:

$\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt-\sigma\upsilon\nu^2 x=-1+\int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt$, f΄(0)=1 και f(0)=2. Να βρείτε τον τύπο της f.

134. Να βρείτε μία συνάρτηση f συνεχή στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\int_1^x \mathrm{f(t)\,dt=xf(x)-lnx-2,\ x>0.}$$

135. Να βρείτε μία συνάρτηση f συνεχή στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$x[1-\mathrm{f(x)}]=\mathrm{f(x)}-\int_0^x \mathrm{f(t)\,dt,\ x\geq 0.}$$

136. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $(1,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει:

$$\mathrm{f(x)}=1+\int_e^x\left(\frac{\mathrm{f(t)}}{\mathrm{t}}+\frac{1}{\ln^2 \mathrm{t}}\right)\mathrm{dt},\ \mathrm{x>1}\ \text{ και }\ \mathrm{f(e)=1}.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

137. Να βρείτε μία συνάρτηση f συνεχή στο $\Re$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)>0$ στο R και $f(x)=2006+\int_1^x f(t)dt,\ x\in\Re$.

138. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\Re$. Αν για κάθε x στο $\Re$. ισχύει ότι $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και αντιστρόφως.

139. Έστω μα συνάρτηση f συνεχής στο $(-\infty,0]$ με $f(x)<0$ για $x\le 0$. Αν ισχύει ότι: $f^2(x)=1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+e^t}dt$, να βρείτε τον τύπο της f.

140. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i) $\int_0^x e^{x-t}f(t)dt=x^2e^x-f(x),\quad x\in\Re$.

ii) $\int_1^x xf(t)\ln\frac{x}{t}dt=f(x)+\int_1^x \frac{xf(t)}{t^2}dt,\ x\in(0,+\infty)$

141. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ όταν:

i) $f(x)=\int_0^x e^t f(x-t)dt$ ii) $f(x)=x^2\int_0^x t\cdot ημ(xt)dt$

iii) $f(x)=\frac{1}{e^x}+\int_0^x e^t f(x-t)dt$ iv) $f(x)=\frac{1}{e^x}+\int_0^x \frac{f(x-t)}{e^x}dt$

142. Έστω μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$, συνεχής για την οποία ισχύει:

$f(x)=1+2x\int_{2x}^{2x^2} f\left(\frac{t}{2x}\right)\frac{dt}{t^2}$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

143. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει:

*i)* $f(x)=2\int_1^x\left(\int_0^1 xf(t)dx\right)dt-x,\quad x\in\Re$

*ii)* $f(x)=2\int_0^x\left(\int_1^e tf(t)\ln x dx\right)dt,\quad x\in\Re$

iii) $f(x)=x+\int_1^x\left(\int_0^\pi f(t)ημx dx\right)dt,\quad x\in\Re$

### Όρια

144. Αν $F(x)=\int_1^x f(t)dt,\ x>0$ και $f(t)=\int_1^{t^2}\frac{\sqrt{1+u}}{u}du,\ t>0$ να βρείτε:

i) Την $F'(1)$ ii) το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{xF''(x)-2}{ημ2x}$.

145. Έστω μία συνάρτηση f με f ΄ συνεχή στο $\Re$. Αν f(0)=f ΄(0)-1=0, να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x xf(t)dt}{x-\eta\mu x}$.

146. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$. για την οποία ισχύουν: f(0)=0 και f ΄(0)=2006. Να υπολογίσετε τα όρια:

*i)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ *ii)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{1-\sigma\upsilon\nu\, x}$.

147. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}\cdot\int_1^x(\sqrt{t^2+3}-2)dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_0^x\dfrac{e^t-1}{x^2}dt\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\int_1^x\dfrac{\ln t}{(x-1)^2}dt\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\int_0^x(\sigma\upsilon\nu t-1)dt$

148. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$. και η ευθεία ε: ψ=2x-2 είναι εφαπτόμενη της $C_f$ στο $x_o$=1, να βρείτε το όριο:

$\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x\dfrac{f(t)}{x^2-2x+1}dt$.

149. Να υπολογίσετε τα όρια:

*i)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{x}}xe^{t^2}dt$, *ii)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}}\dfrac{x}{\ln t}dt$, *iii)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{e^{-x}}\dfrac{x}{1+t^2}dt$

150. Αν $F(x)=\int_0^x f(t)dt,\ x\in\Re$ και $f(t)=\int_{2t}^t\sqrt{1+u^2}du,\ t\in\Re$ να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F''(x)-\sqrt{1+x^2}}{x+1}$.

151. Η συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $x_o$=0. Αν ισχύουν f(0)=0 και f΄(0)=2, να υπολογίσετε το όριο:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\left(\int_0^x e^t dt\right)^2}$.

**Μελέτη συνάρτησης**

152. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ *και* $g(x)=\int_0^x x\,f(t)\,dt,\ x\in\Re$. Αν το $x_o$=1 είναι σημείο καμπής της g, να δείξετε ότι:

$\int_0^1 f(t)\,dt = g'(1)+\dfrac{1}{2}f'(1)$.

153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x |t-1|dt,\ x\in[0,3]$.

α) Να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .
β) Να βρεθεί το π. τιμών της.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή και να εξετάσετε αν η f έχει σημεία καμπής.

154. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:\Re^*\to\Re$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ και η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

i) Να βρείτε το π. ορισμού της F.
ii) Να βρείτε τις ρίζες της F και το πρόσημό της.
iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση $G(x)=\int_2^x\left(\int_1^t f(u)\,du\right)dt$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακρότατων..

155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}+\int_{\frac{1}{e}}^x \dfrac{2dt}{\ln^2 t}$.

i) Να βρείτε το π. ορισμού της f .
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα, τα κοίλα και να εξετάσετε αν έχει σημεία καμπής.

156. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{-2}^x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$.

i) Να βρείτε το π. ορισμού της f .
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii)Να δείξετε ότι: $\int_{-2}^x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt\le 2\sqrt{e}-e$, για κάθε $x<0$.

157. Αν η συνάρτηση $f:\ \Re\to\Re$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα να λύσετε την εξίσωση: $\int_x^{3x-2} f(t)dt=2\int_1^x f(t)dt$.

158. Αν η συνάρτηση $f:\ \Re\to\Re$ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και περιττή, να αποδείξετε ότι η $g(x)=\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$ είναι κυρτή.

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_2^x\sqrt{4-t^2}\,dt$.

i) Να βρείτε το π. ορισμού της f .
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

160. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$, να δείξετε ότι η $g(x)=\int_0^1 tf(xt)dt$ είναι συνεχής στο 0.

161. Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\int_2^t\sqrt{u^2-u}\,du$.

Α. i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
iii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

Β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση: $F(x)=\int_3^x\left(\int_2^t e^t\sqrt{u^2-u}\,du\right)dt$.

162. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\Re$, η οποία έχει κρίσιμο σημείο το $x_o=0$. Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση $g(x)=\int_0^x(1+x^2)f(t)dt,\ x\in\Re$.
Να αποδειχθεί ότι $g''(0)=0$.

163. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $\int_1^{x^2} f(t)\,dt = x^2\ln x,\ \ x>0$.
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $A(1, f(1))$.
β)Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,+\infty)$.

**Συνάρτηση $\int_a^x f(t)\,dt$ και υπαρξιακά θεωρήματα.**

164. Έστω f και g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α β] για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx$. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν F και G είναι αρχικές των f και g αντίστοιχα στο [α, β], τότε, η συνάρτηση φ(x)=F(x)-G(x) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [α, β].
β) Υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f(x_o)=g(x_o)$.

165. Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα [α, β]. Αν ισχύει ότι $\int_a^\beta f(x)\,dx=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α, β).

166. Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει:
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx.$$
Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα (0, 2).

167. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [λ, λ+1], $\lambda\in\Re$ για την οποία ισχύουν $f(\lambda)<0$ και $\int_\lambda^{\lambda+1} f(t)\,dt>0$. Να αποδείξετε ότι:
α) Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_o\in(\lambda,\lambda+1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x_o)>0$.
β) Υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi\in(\lambda,\lambda+1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

168. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0, 2006] για την οποία ισχύει:
$$2006\cdot f(2006)+\int_0^{2006} f(x)\,dx=0 \quad \mu\varepsilon\ \ f(2006)\neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, 2006).

169. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [-1, 1] για την οποία ισχύει ότι:

$$\int_{-1}^{2} f(t)\,dt \cdot \int_{2}^{1} f(t)\,dt > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει ένας τουλάχιστον α $\in$(-1, 1) τέτοιος, ώστε: $\int_{a}^{2} f(t)\,dt = 0$.

β) Η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (-1, 2).

170. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει ότι:

$$\int_{0}^{1} f(t)\,dt \cdot \int_{0}^{2} f(t)\,dt < 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει ένας τουλάχιστον α $\in$(0, 2) τέτοιος, ώστε: $\int_{0}^{a} f(t)\,dt = 0$.

β) Η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (0, 2).

171. Έστω συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [α, β] και ισχύει f(α)=f(β). Αν $\int_{\alpha}^{\beta} xf''(x)dx = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση xf΄΄(x)+f΄(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β).

172. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο [α, β], να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον ξ$\in$(α, β) τέτοιο, ώστε: $g(\xi)\int_{a}^{\xi} f(t)dt = f(\xi)\int_{\xi}^{\beta} g(t)dt$.

173. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β] με α>0 και $\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx = 0$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον ξ$\in$(α, β) τέτοιο, ώστε:

$\int_{a}^{\xi} f(x)dx = \xi \cdot f(\xi)$.

174. Έστω μια συνάρτηση f: [-1, 1]$\to \Re$ συνεχής με $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$ και η συνάρτηση

$F(x) = \int_{-1}^{1} (x-1)\,f(tx-t)\,dt$ $\mu\varepsilon$ $x \in [0, 1]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$(0, 1) τέτοιο, ώστε f(1-ξ)+f(ξ-1)=0.

175. Έστω μια συνάρτηση f: [0, 1] $\to \Re$ συνεχής με $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 1$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\int_{0}^{x} f(t)\,dt = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 1).

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$x_0\, f(x_0) + \int_{0}^{x_0} f(x)\,dx = 1.$$

***************

176. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\int_2^x \frac{\ln t}{t}dt,\ x>0$.

α) Να υπολογιστεί η $f'(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle για την f στο [1,2].

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιος ώστε:

$$\frac{1-x_0}{x_0}\ln x_0=\int_2^{x_0}\frac{\ln t}{t}dt.$$

177. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ για την οποία ισχύει:

$1+t \le f(t) \le e^t$ *για κάθε* $t \in \Re$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=1,\ f'(0)=1$

β) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt-x}{x^2}=\frac{1}{2}$

γ) Η εξίσωση $1+x^2=2\int_0^x f(t)\,dt$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (0, 1).

178. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο [1, 2] και ισχύει $f(x)<1$ για κάθε x στο [1,2]. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^x f(t)\,dt = x^2-3$ έχει μοναδική ρίζα στο (1, 2).

179. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [0, 2] για την οποία ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,2]$ και g συνάρτηση τέτοια, ώστε $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Να δείξετε ότι η ευθεία ψ=3x-2 τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα μόνο σημείο.

180. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ η οποία είναι συνεχής και η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ για την οποία ισχύει: $F(1)<0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi)<0$.

181. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ για την οποία ισχύει:

$\int_0^x\left(\int_1^t f(u)\,du\right)dt \ge 1-e^x$ *για κάθε* $x\in\Re$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

182. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $\int_1^2\frac{1+\xi^2}{1+t^2}dt=1$.

183. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο [-1, 2] συνάρτηση με $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 3f(2)$.
Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μια τουλάχιστον οριζόντια εφαπτόμενη.

184. Έστω μια συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x+t)\,dt \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,\ x \in \Re$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο Μ της $C_f$ με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτόμενη σε αυτό να είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

185. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \Re \to \Re$ για την οποία ισχύουν:
$i)\ \int_{1}^{e} f(x)\,dx = 1 + e$ *και* ii) $x\ln x \ge \int_{1}^{x} f(t)\,dt - 1$ *για κάθε* $x > 0$.
Να βρείτε το σημείο τομής της $C_f$ με την ευθεία x=e.

186. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \Re \to \Re$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει:
$\int_{0}^{x} f(t)\,dt \ge 2^x + a^x - 3^x - 5^x$ για κάθε $x \in \Re$ και α>0. Να βρεθεί η τιμή του α.

187. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \Re$ και f(0)=0.

α) Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

β) Να βρεθεί το : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$.

γ) Δίνονται οι συναρτήσεις: $h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt$ και $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$.
Δείξτε ότι h(x)=g(x) για κάθε $x \in \Re$.

δ) Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt=\dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μια λύση στο (0,1).

( $4^o$ θέμα εξετάσεων 2005).

188. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, 1] με f ΄(x)<1 στο [0, 1]. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) \le x + f(0),\ \ x \in [0,1]$.

β) $\int_0^1 f(x)\,d\,x \le \dfrac{1}{2} + f(0)$.

γ) Αν f(0)+1=0, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1 + \int_0^x f(t)\,dt = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (0, 1).

*****************

**Εφαρμογή του ολοκληρώματος στα εμβαδά επιπέδων χωρίων.**

189. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τις ευθείες x=-2 και x=2 και τον άξονα χ΄χ.

190. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4$, τις ευθείες x=-3 και x=4 και τον άξονα χ΄χ.

191. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3-x, & x<0 \\ -(x+1)(x-3), & 0\le x\le 1 \\ 4x, & x>1 \end{cases}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=-1 και x=2.

192. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $|f(x)|=9-x^2,\ x\in\Re$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα χ΄χ.

193. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα χ΄χ αν:
α) $f(x)= x^2(3-x)$, β) $f(x)=(3-x)(x+1)$, γ) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 1 \\ x(4-x), & x>1 \end{cases}$.

194. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την αντίστοιχη ευθεία αν:
α) $f(x)=-x^2+2x+8$ και ψ=5, β) $f(x)=4-x^2$ και ψ=3.

195. Δείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^3+6x^2-9x+4$, τον άξονα χ΄χ και τον άξονα ψ΄ψ, είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες ψ=4 και x=4.

196. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και g, όταν:

$i)\ f(x)=-3x^2+4x,\ g(x)=x$ $\qquad ii)\ f(x)=\frac{x+1}{x},\ g(x)=-2x+4$

$iii)\ f(x)=2x^2+x,\ g(x)=-x^2+3x$ $\qquad iv)\ f(x)=\frac{1}{x^2},\ g(x)=-4x^2+5$

197. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\Re$. Δίνεται ότι:

$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -3,\ \int_{0}^{2} f(x)\,dx = -1,\ \int_{1}^{2} f(x)\,dx = -3$ *και* $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0.$

Το πρόσημο της συνάρτησης φαίνεται στον πίνακα:

| x | $-\infty$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | - | + | - | + | - | + | |

α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x= -1 και x=1.
β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x= -2 και x=0.

198. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Να βρεθεί το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ, την εφαπτόμενη της $C_f$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία x= -1.

199. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2-\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

i) Να βρεθεί η ευθεία (ε) που είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.
ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την $C_f$, την (ε), τον άξονα ψ΄ψ και την ευθεία x=α, α<0.
iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{a\to-\infty} E(a)$.
iv) Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε (α) τη χρονική στιγμή που είναι α=-ln2.

200. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=e^{-x}$. Να βρεθεί η ευθεία x=α, α>0 τέτοια, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και την ευθεία x=α να είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

201. i) Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3$ και τις ευθείες $ψ=α^3$, $α\in(0,2)$, x=0 και x=2.
ii) Για ποια τιμή του $α\in(0,2)$ το εμβαδόν Ε(α) γίνεται ελάχιστο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του;

202. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^x-ae^{-x}, & x\le 0 \\ x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x>0 \end{cases}$.

i) Να βρείτε το α.
ii) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της $C_f$.
iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τις οριζόντιες ασύμπτωτες αυτής και τις ευθείες x=-1 και x=1.

***************

203. Έστω συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(x)=x+\int_1^x\left(f'(t)-t^2f(t)\right)dt,\ x>0$.
i) Να βρείτε τον τύπο της f(x).
ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ και τις ευθείες x=1, x=e και ψ=4.

204. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=e^x+\int_0^x f(x-t)\,dt,\ x\in\Re$.
i)Δείξτε ότι f(x)=(x+1)$e^x$.
ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ και την ευθεία x=1.

205. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση
$f(x)=\int_1^x\left(a+\sqrt{f(t)}\right)dt,\ a\geq 0,\ f'(1)=0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(x)>0$.
i) Να βρεθεί το α.
ii) Αν $g(x)=-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες x=1 και x=2.

206. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με f($\frac{\pi}{2}$)=2 για την οποία ισχύει:
συνxf(x)=ημxf΄(x) για κάθε x$\in(0,\pi)$.
α) Να βρείτε τον τύπο της f(x).
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=$\frac{\pi}{6}$ και x=$\frac{\pi}{2}$.

207. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g: $\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει:
$\int_0^{x+1}f(t)\,dt=x\,\sigma\upsilon\nu(x+1)-\eta\mu(x+1)-\int_{x+1}^0 g(t)\,dt,\ \ x\in\Re$.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g, τον άξονα ψ΄ψ και την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$.

208. Α) Έστω συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $\frac{x f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x},\ x>0$ $\kappa\alpha\iota$ $f(1)=e$
α) Να βρεθεί ο τύπος της f(x).
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_g$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=$\frac{1}{2}$ και x=1 όπου $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$.
Β) Έστω συνάρτηση f: $(1,+\infty)\to(0.+\infty)$ με $f(x)=x\ln x f'(x),\ x>1$ και f(e)=e.
α) Δείξτε ότι f(x)=elnx, $x>1$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ , τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=1 και x=e .

209. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ $\mu\varepsilon$ $x f'(x)=e^{\frac{1}{x}}(x-1),\ x>0$ $\kappa\alpha\iota$ $f(1)=e$.
α) Να βρεθεί ο τύπος της f(x).
β) Έστω g η συνάρτηση με τύπο $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^3},\ x>0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_g$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=1 και x=e.

210. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει:
$$f(x)=\frac{x}{2}+2\cdot\int_1^x\frac{f(t)}{t}dt,\ x>0.$$
α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=1 και x=e.

211. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με τύπο $f(x)=e^x+x^2\int_0^1 t\eta\mu^2(tx)dt$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ και την ευθεία x=$\dfrac{\pi}{4}$.

212. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει f(x+ψ)=f(x)+f(ψ)+2, $x,\psi\in\Re$. και $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)+2}{h}=3$
α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=0 και x=1.

213. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re^*\to\Re$ για την οποία ισχύει
$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)+1}{h}=1\ \kappa\alpha\iota\ f(x\cdot\psi)=f(x)+f(\psi)+1\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x,\psi\in\Re^*.$$
i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.
ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=1 και x=e

214. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει f(x)f΄(x)=ημx, $x\in\Re$..
Αν f(0)= $-\sqrt{2}$ τότε:
α) Να βρεθεί ο τύπος της f.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_g$, όπου g(x)=f(x)ημx, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=0 και x=$\dfrac{\pi}{2}$.

215. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\int_1^x e^{-f(t)}dt,\; x>0.$$

α) Να βρεθεί ο τύπος της f(x).

β) Αν g(x) η συνάρτηση με τύπο $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_g$, τις ευθείες x=1 και x=e και την οριζόντια ασύμπτωτη της $C_g$.

216. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)\neq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(x)=2+\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt \;\; \gamma\iota\alpha \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \;\; x>0.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt,$ τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=1 και x=e.

217. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}\cdot f'(x),\; x>0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(1)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=2 και x=6.

***************

218. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x)\geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \int_0^x\left(\int_1^t f(u)\,du\right)dt\geq 1-e^x \;\; \gamma\iota\alpha \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \;\; x\in\Re.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ και την ευθεία x=1.

219. α) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x)\geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \int_0^{2x-1}\left(\int_t^1 f(u)\,du\right)dt\geq \frac{1}{\sqrt{e}}-e^{-x} \;\; \gamma\iota\alpha \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \;\; x\in\Re.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ και την ευθεία x=1.

β) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν: $f(x)\geq 0$ και $\int_0^{x-2}\left(\int_2^t f(u)\,du\right)dt\geq -e^{-2}+e^{-x},\; x\in\Re.$ Αν η f είναι άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ μια τις ευθείες x=-2 και x=2.

****************

## Γενικά θέματα στα ολοκληρώματα

220. Έστω συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ στο $\Re$. Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί $z_x=x+if'(x)$, $x \in \Re$ με $Re(z_o z_1)>0$.
α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$.
β) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο το 0 για $x_1=\frac{1}{2}$. Τότε:
i) Να βρείτε το είδος του ακρότατου και το πρόσημο της f.
ii) Αν επιπλέον το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από την $C_f$ και τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ είναι 2τ.μ., να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=4$.

221. Έστω ο μιγαδικός z=α+βi, $\alpha,\beta \in \Re$ $\mu\varepsilon\ \alpha \neq 0$ που η εικόνα του ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο και η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-z|^2-|x+\bar{z}|^2}{x^2+|z|^2}$.
α) Να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
β) Αν $|z-1|<|z+1|$, τότε:
i) Να βρεθούν τα ακρότατα της f και το σύνολο τιμών της.
ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ και την ευθεία x=α.

222. Έστω οι μιγαδικοί z και w με $|w|=1$, $z \notin \Re$, $z+\frac{1}{z} \in \Re$ και η συνάρτηση $f(x)=|z+xw|$, $x \in \Re$.
α) Να δείξετε ότι ο z κινείται σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας ρ=1.
β) Αν $Re(z\bar{w})=0$ τότε:
i) Να δείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.
ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ και τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ.

223. Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\Re$ $\mu\varepsilon$ $f(x)=e-\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ είναι σταθερή.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και κυρτότητας της f.
δ) Να δείξετε ότι: $\sqrt{e}<\int_1^2 f(x)\,dx<e$.
ε) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_o \in (1,2)$ τέτοιο ώστε:
$$\int_1^2 f(x)\,dx = e^{\frac{1}{x_0}}.$$

224. Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\Re$ , συνεχής για την οποία ισχύει:

$$f(x)=x^2-2x\cdot\int_x^1\frac{1}{t^2}f\left(\frac{x}{t}\right)dt.$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

β) Να δείξετε ότι: $f(x)=\frac{5}{2}e^{2x-2}-x-\frac{1}{2}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

225. Έστω μια συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\Re$ η οποία είναι συνεχής και για κάθε χ>0 ισχύει: $3x^2+\frac{4}{x^2}\cdot\int_x^{x^2}t\cdot f\left(\frac{t}{x}\right)dt=2x^2\ln x+4x$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της f στο σημείο καμπής της.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f ,την (ε) και την ευθεία x=e.

226. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ και η συνάρτηση

$$g(x)=\int_0^x\left(\int_1^u f(t)\,dt\right)du+e^x-1,\ x\in\Re.$$

Αν ισχύει $g(x)\geq 0$ *για κάθε* $x\in\Re$, να δείξετε ότι:

α) $\int_0^1 f(t)\,dt=1$.

β) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε* $\int_0^{x_0}\left(3f(t)-\frac{1}{t+1}\right)dt=1$.

γ) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: f(ξ)=4ξ-1.

227. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει:

$$3x+\int_1^x x\cdot f(u)\,du\geq e^x-\sigma\upsilon\nu 2x,\ x\in\Re.$$ Να δείξετε ότι:

α) $\int_0^1 f(t)\,dt=2$.

β) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε* $\int_0^{x_0}f(x)\,dx=1-x_0$.

γ) Υπάρχει $\xi_0\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε* $f(\xi)=2\xi+1$.

228. Α) Έστω μια παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με f(0)=0. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt-xf(x),\ x\in\Re$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^{-1}$, τον άξονα χ΄χ και την ευθεία x=e.

229. Έστω μια συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)<0$ για κάθε $x \in \Re$ και η συνάρτηση $g(x)=\int_{4-x}^{x} f(t)\,dt,\ x \in \Re$.
α) Να λύσετε την εξίσωση $g''(x)=0$.
β) Να βρείτε τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της $C_g$.
γ) Να δείξετε ότι: $2\int_{1}^{3} f(x)\,dx > \int_{0}^{4} f(x)\,dx$.

230. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[1,2]\to \Re$ *με* $f(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in[1,2]$. Δίνεται επίσης ότι $\int_{1}^{2} x f(x)\,dx = 1$ και η συνάρτηση $F(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt+\int_{2}^{x} f(t)\,dt$.
α) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ *τέτοιο, ώστε* $f(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$.
β) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{1}^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{2} f(t)\,dt.$$

δ) Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από την $C_f$ τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=1, x=2 είναι ίσο με $\dfrac{1}{2}$ τ.μ., να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{1}^{2} F(x)\,dx$.

231. Έστω μια συνάρτηση $f:\ \Re \to \Re$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$ *και η συνάρτηση* $F(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt+\int_{1}^{2-x} f(t)\,dt$.
α) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.
β) Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{(x-1)^2} = f'(1)$.

232. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g: $\Re \to \Re$ για τις οποίες ισχύει:
$\int_{1}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} g(t)dt + x^2 - 2x + 1,\ x\in\Re$.
α) Αν η ευθεία ψ=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$, να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της $C_g$ στο $+\infty$.
β) Αν η $C_g$ τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία με τετμημένες $x_1$ και $x_2$ με $x_1<1<x_2$, να δείξετε ότι η $C_f$ τέμνει τον άξονα χ΄χ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(x_1,x_2)$.
γ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f$ και $C_g$, τον άξονα ψ΄ψ και την ευθεία x=2.

233. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3+\eta\mu^2 t}dt$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

β) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{f(t)}{(2x-\pi)^2}dt$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από την $C_f$ τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\pi$.

234. Έστω μια συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$\int_{x}^{x^2} f(t)\,dt \ge x^2 - x \ \text{για κάθε}\ x\in\Re.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o)=0$.

235. Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f''(x)>0$ στο [α, β].

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$$g(x)=2\int_{a}^{x} f(t)\,dt-(x-\alpha)\big(f(\alpha)-f(x)\big),\ x\in[\alpha,\beta].$$

β) Να αποδείξετε ότι: $\int_{a}^{\beta} f(t)\,dt<(\beta-\alpha)\cdot\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{2}$.

236. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}$ $x\in\Re$.

Αν $F(x)=\int_{0}^{\frac{1+\varepsilon\varphi x}{2}} f(t)\,dt,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $F'(x)=1$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

β) να βρείτε τον τύπο της F(x)

γ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=0 και x=1.

237. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in[0,1]$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να δείξετε ότι $\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx+\int_{1}^{\frac{1}{e}}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}dx=\frac{1}{e}$.

238. Έστω μια συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)\,dt,\ x\in\Re$ με $\alpha,\beta\in\Re$ είναι παραγωγίσιμη

β) Αν υπάρχει $x_0\in\Re$ με $F'(x_0)=0$, τότε F(x)=0 για κάθε $x\in\Re$.

(Πανελλήνιες εξετάσεις 1995)

239. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο [0, α], γνησίως αύξουσα στο [0, α] και έχει πεδίο τιμών το [0, β], να αποδειχθεί ότι: $\int_0^{\alpha} f(t)\,dt + \int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt = \alpha\cdot\beta$.

240. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: 0,+\infty) \to \Re$ για την οποία ισχύει: $\int_{\psi}^{x} f(t)\,dt = (x-\psi)\, f\left(\sqrt{x\psi}\right)$, $x\cdot\psi > 0$ και η ευθεία ε: 2x-ψ-2=0 εφάπτεται της $C_f$ στο $x_o$=1.

Α) Να δείξετε ότι: $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Β) Δίνεται η συνάρτηση F(x)= $\int_1^{x} f(t)\,dt$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F, τον τύπο τις ρίζες και το πρόσημό της .β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την $C_F$ τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=1 και x=2.

241. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: 0,+\infty) \to \Re$ για την οποία ισχύει: f ΄(1)=1 και $f(x\psi) = x f(\psi) + \psi f(x)$ *για καθε* $x,\psi \in (0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι *i*) $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ *ii*) $f(x) = x\ln x,\ \ x > 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x)=x^2-1$,

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ τον άξονα χ΄χ και την ευθεία $x=e^{-1}$.

242. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $(-1,+\infty) \to \Re$ για την οποία ισχύει:

$$4\int_{\frac{x}{2}}^{0} t\, f(x-2t)\,dt = \ln(1+x), \quad x > -1.$$

α) Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(x^3+x^2)f(x)$, τον άξονα χ΄χ και την ευθεία x=1.

γ) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=g(e^x)\eta\mu e^{-x}$.

243. Η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ είναι συνεχής στο $\Re$ και περιοδική με περίοδο Τ. Να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = \int_0^{T} f(t)\,dt$, *για κάθε* $\alpha \in \Re$.

244. Έστω α>0 και f συνάρτηση συνεχής στο [-α, α]. Αν $g(x) = \int_0^{x} f(t)\,dt,\ x \in [-\alpha,\alpha]$ να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι άρτια, τότε η g είναι περιττή.

β) Να η f είναι περιττή, τότε η g είναι άρτια.

245. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\Re$. *Αν* $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$ *για κάθε* $x \in \Re$, να δείξετε ότι η f είναι περιττή και αντιστρόφως.

246. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε να ισχύει: $\int_1^x f(t)\,dt + \int_x^1 g(t)\,dt = x^2 - 2x + 1,\ x \in \Re$ και έστω $C_f$ και $C_g$ οι γραφικές τους παραστάσεις. Έστω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο λύσεις $\rho_1$ και $\rho_2$ με $\rho_1<1<\rho_2$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση g(x)=0 έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(\rho_1, \rho_2)$.

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=-2$.

β) Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\Re$, να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\Re$.

ii) Η f έχει ένα μόνο ελάχιστο στο $\Re$, το οποίο παρουσιάζεται στο σημείο $x_o=\xi$ του ερωτήματος α)ii).

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f$ και $C_g$ και τον άξονα ψ΄ψ.

**************
**********
*****
*

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**
**ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ**

1. i) Α=$x^3$+συνx+ημx+c. ii) Β=$12\sqrt{x^3}+18x^2+\frac{36}{5}\sqrt{x^5}+c.$ iii) Γ=$\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+\varepsilon\phi x+c.$
   iv) Δ=$2e^x-3e^{-x}-7x+c$. v) Ε= $x+\ln|x+1|+c$ . vi) Ζ=-συν2x+5/3ημ3x-3x+c.
2. i) Α=εφx-σφx+c. ii) Β= ημx-x+3εφx+c. iii) Γ=4x-ημ4x+c. iv) Δ=εφx-σφx-2x+c.
3. i) Διαπιστώνουμε ότι η f είναι συνεχής στο 1 οπότε είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ . Η αρχική της f είναι η F(x)=$\begin{cases} x^4+x+c_1, & x\le 1\\ 6x-\frac{x^2}{2}+c_2, & x>1\end{cases}$ και απαιτώντας να είναι συνεχής στο 1 βρίσκουμε ότι: $c_1=7/2+c_2$. Αν $c_2$=c, ττο αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) είναι $\begin{cases} x^4+x+\frac{7}{2}+c, & x\le 1\\ 6x-\frac{x^2}{2}+c, & x>1\end{cases}$ . (όμοια για τις άλλες περιπτώσεις).
4. f(x)=$3x^4+x^3+\frac{x^2}{2}+12x+\frac{21}{2}$.
5. $f(x)=2x^3-\frac{5}{2}x^2-4x+10.$
6. f(x)=$x^3+x^2+1$.
7. f(x)=2lnx+1.
8. $f(x)=\sqrt{2e^x+x^2+2}.$ (Είναι f(x)>0 γιατί f(0)=2>0).
9. f(x)=xlnx+e.
10. $f(x)=\frac{1-2^{-\frac{x^3}{3}}}{\ln 2}+4.$
11. f(x)=ln(x+lnx).
12. f(x)=$2x^2$.
13. α=-1, β=1.
14. i) Ολοκλήρωση πηλίκου (c=1/2). ii) Η(x)=$\frac{1}{4}f^2(x)$+c.
15. α) 20km/h. β) R(20)-R(10)=………..
16. α) $t=\sqrt{\frac{2}{\ln 2}}$ *έτη.* β) P(2)=………
17. α) P(1) και P(6). β) P(t)$\geq$51000.
18. α) t=10έτη.
19. R(8).
20. α) Αφού η f δεν είναι 1-1, θα υπάρχουν $x_1,x_2$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε: $f(x_1)=f(x_2)$. Οπότε….
    β) Συμπέρασμα του Θ. Rolle για την g στο $[x_1,x_2]$.
21. Ολοκλήρωση της σχέσης –f(-x)=f(x).
22. Θ. Rolle στην g(x)=F(x)-$x^2$/2 , στο [-1,1].
23. α) F(0)=1/2. β) g΄(x)=0 και g(x)=1/4. γ) f(x)=$2e^{4x}$, $x\in\Re$.

**Παραγοντική ολοκλήρωση**

24. i) $x^2$ημx+2xσυνx-2ημx+c.
    ii) $\frac{1}{5}xe^{5x}-\frac{1}{25}e^{5x}+c$ .
    iii) $\frac{x^2}{2}-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+c.$
    iv) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{25}x^2\sqrt{x}+c.$
    v) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+c.$
    vi) $\frac{3}{4}x^2$συν2x-$\frac{3}{4}$xημ2x-$\frac{3}{8}$συν2x+c.

vii) $\frac{1}{5}e^{2x}(-\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x)+c$.

viii) $\frac{1}{2}x^2e^{2x}+c$.

ix) $-\frac{1}{x}(\ln x+1)+c$.

25. i) $x\ln x-x+c$.
ii) $x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6x\ln x-6x+c$.
iii) $x\varepsilon\phi x+\ln|\varepsilon\phi x|+c$.
iv) $-x\sigma\phi x+\ln|\sigma\phi x|+c$.
v) $\frac{1}{4}e^{-2x}(\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu 2x)+c$.
vi) $x\varepsilon\phi x+\ln|\varepsilon\phi x|-\frac{x^2}{2}+c$.

26. α=1. $f(x)=\frac{x^2}{2}(1-\ln x)-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$.

27. i) $\frac{x^3+1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{18}(2x^3-3x^2+6x)+c$ ii) $x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x-\ln|x+1|+c$.
iii) $x\ln(1-x^2)-2x-\ln|x-1|+\ln|x+1|+c$
iv) $e^x(x^2-2x+2)+c$.
v) $-e^{-x}(x+2)+c$.
vi) $2\sqrt{x}(\ln x-2)+c$.

28. I+J=$x^2$+c, I-J=$-x\eta\mu 2x-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x+c$, I=$\frac{1}{2}(x^2-x\eta\mu 2x+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x)+c$
J=$\frac{1}{2}(x\eta\mu 2x+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x)+c$.

29. α) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$. β) A=f(x)+c. B=$\int (x)'\sqrt{x^2-4}dx=...$

**Αντικατάσταση μεταβλητής.**

30. i) Θέτω u=2x+1, ii) Θέτω u=2x+5,
iii) Θέτω u=2-4x, iv) Θέτω u=$x^2$-2,
v)Θέτω u=$x^2$-x+7, vi) Θέτω u=$x^2$+1.

31. i)Θέτω u=$x^2$+6x, ii) Θέτω u=$\sqrt{3+x\ln x}$,
iii) Θέτω u=$e^{2x}$, iv) Θέτω u=ln(ημx),
v)Θέτω u=$\sqrt{2+x^3}$, vi) Θέτω u=$\sqrt{2-x}$.

32. i)Θέτω u=1+εφx, ii) Θέτω u=$\sqrt{1+x}$,
iii) Θέτω u=$x^2$+1, iv) Θέτω u=$\frac{1}{\sqrt{x}}$,
v) Θέτω u=$\sqrt{1+e^x}$, vi) Θέτω u=$\sqrt{\ln x}$,
vii) Θέτω u=$e^x$, viii) Θέτω u=$\sqrt{x+3}$, ix) Θέτω u=ημx.

33. i) $x+3\ln|x+2|+c$.,
ii) $\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}\ln|3x-4|+c$.
iii) $\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+c$.
iv) $\frac{x^2}{2}-4x+16\ln|x+4|+c$.

v) $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\ln(e^x+3)+c.$

vi) $e^x-4x+3\ln(e^x+1)+c.$

34. i) $\frac{1}{8}\ln|x-4|-\frac{1}{8}\ln|x+4|+c.$

ii) $\ln|x|-\ln|x+1|+c.$

iii) $\ln|x-3|-\ln|x-2|+c$ .

iv) $\ln|x^2-3x+2|+c.$

v) $2\ln|x-1|+c.$

vi) $\frac{x^2}{2}+4x-4\ln|x-1|+\ 23\ln|x-3|+c.$

vii) $x-2\ln|x-1|+7\ln|x-2|+c$ .

viii) $-3\ln|x-1|+3\ln|2x-3|+c.$

35. i) Θέτω u=συνx και αναλύω σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
ii)Θέτω u=ημx και αναλύω σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

36. i) και ii) Θέτω u=$e^x$ και αναλύω σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

37. i) Θέτω u=$\sqrt[6]{x}$ , ii) Θέτω u=$\sqrt{\frac{x}{x+5}}$ , iii) Θέτω u=$\sqrt{\varepsilon\phi x}$ .

**Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων.**

38. i)Θέτω u=συνx. Είναι $-\ln|\sigma\upsilon\nu x|+c.$

ii)Θέτω σφ$^2$x=-1-(σφx)΄. Είναι –x-σφx +c.

iii) $\frac{1}{2}\varepsilon\phi^2x+\ln|\sigma\upsilon\nu x|+c.$

iv) $\frac{1}{3}\varepsilon\phi^3x-\varepsilon\phi x+x+c.$

v) $\frac{x}{2}-\frac{\eta\mu 2x}{4}+c.$

vi) συν$^4$x=(συν$^2$x)$^2$=…(τύποι αποτετραγωνισμού)

vii) $\eta\mu^3x=\eta\mu^2x\cdot\eta\mu x=\ (1-\sigma\upsilon\nu^2x)\cdot\eta\mu x=$ ….Θέτω u= συνx. viii) Όμοια με την vii).

39. i) $\frac{1}{2}\eta\mu^2x-\frac{1}{4}\eta\mu^4x+c.$

ii) $\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\eta\mu 4x+c.$

iii) $-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{3\sigma\upsilon\nu^2x}+c.$

iv) $-\frac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x+c.$

v) $\frac{\sigma\upsilon\nu^4x}{4}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{2}+c.$

vi) $-\frac{\sigma\upsilon\nu^5x}{5}+\frac{\sigma\upsilon\nu^7x}{7}+c.$

40. i) $\frac{x^2}{4}-\frac{x\cdot\eta\mu 2x}{4}+\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{8}+c.$

ii) $\frac{e^x}{2}-\frac{e^x}{10}(\sigma\upsilon\nu 2x+2\eta\mu 2x)+c$ .

iii) $-x\sigma\phi x+\ln|\eta\mu x|+c.$

iv) $x\varepsilon\phi x+\ln|\sigma\upsilon\nu x|-\frac{x^2}{2}+c.$

v) $-\dfrac{x}{2\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{2}\sigma\phi x+c.$

vi) $-x\sigma\phi\dfrac{x}{2}+c.$

41. $A=\int(-\sigma\upsilon\nu x)'\ln(1+\eta\mu x)dx=\ldots=-\sigma\upsilon\nu x\ln(1+\eta\mu x)+x+\sigma\upsilon\nu x+c$ -**Αναγωγικοί τύποι.**

42. i) Παραγοντική στο $I_{\nu+1}$.
ii) $I_3=\dfrac{x^2}{2}(\ln^3 x-\dfrac{3}{2}\ln^2 x+\dfrac{3}{2}\ln x-\dfrac{3}{4})+c$

43. i) Παραγοντική στο $I_{\nu+1}$.
ii) $I_1$=xημx-συμx+c, για ν=2 βρίσκω το $I_3$ και για ν=3 το $I_5$.

44. $I_\nu=\int\varepsilon\phi^{\nu-2}x\cdot\varepsilon\phi^2 x dx=\int\varepsilon\phi^{\nu-2}x\cdot\left[(\varepsilon\phi x)'-1\right]dx=\ldots\ldots..$

45.

46. $I_3=x(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6)+c.$

47. i) Θέτω u= $\sqrt[6]{x+1}$ ,
ii) $\eta\mu x=\dfrac{2\varepsilon\phi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\phi^2\frac{x}{2}}$. iii) Όμοια.
iv) Θέτω u= $\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$ , v) Θέτω u= $\sqrt{x+1}$ ,
vi) Θέτω u= $\sqrt{x}$ .

48. i) Θέτω u= $\sqrt[3]{x}$, ii) Θέτω u= $\sqrt[4]{x+3}$ , iii) $\eta\mu x=\dfrac{2\varepsilon\phi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\phi^2\frac{x}{2}}\ \kappa\alpha\iota\ \ \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1-\varepsilon\phi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\phi^2\frac{x}{2}}.$

49. Τύποι μετασχηματισμού γινομένου σε άθροισμα.

50. i) $f(x)=x-1+2e^{-x}$.
ii) Πολλαπλασιάζω με $e^{-\frac{x}{2}}$. iii) f(x)=x. iv) $f(x)=e^x(x-1)$.

51. α) Συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. β) $f(x)=x^2$.

**Ορισμένο ολοκλήρωμα.**

52. $\int_9^{10} f(x)dx=2,\ \int_0^4 f(x)dx=1,\ \int_7^9 f(x)dx=3$.

53. $\int_3^2 f(x)dx=-3,\ \int_1^5 f(x)dx=0.$

54. $\int_7^5 f(x)dx=3,\ \int_3^5 f(x)dx=7,\ \int_5^1 f(x)dx=-12.$

55. i) $\int_{-3}^{10} f(x)dx.$ ii) $\int_{10}^{20} f(x)dx.$

56. Γίνεται: $\int_{-6}^{2} f(x)dx=3\cdot 8=24.$

57. κ=-5/2.

58. i) 16, ii) -14.

59. Παρεμβολή του γ στο πρώτο και του β στο δεύτερο ολοκλήρωμα.

60. Α+Β=4. Αρκεί να δείξω ότι: $A\cdot B\le 4\Leftrightarrow A\cdot(4-A)\le 4\Leftrightarrow\ldots$.

61. Τα ολοκληρώματα του πρώτου μέλους έχουν άθροισμα 0. Άρα ισχύει η ταυτότητα του Ouler).

**Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων.**

62. i) Α=$\dfrac{e(\eta\mu 1-\sigma\upsilon\nu 1)-1}{2}$ , ii)Β=$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{p}{6}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sigma\upsilon\nu x dx}{1-\eta\mu^2 x}$. Θέτω ημx=u…..Αποτέλεσμα $\dfrac{\ln 3}{2}$. iii) Γ=1. iv) Δ=$\dfrac{\pi^2}{4}$. v) Ε=2(ln2-1)$^2$. vi) Ζ=$\dfrac{\pi^2}{4}-2$.

63. i) Θέτω u=$\sqrt{x}$ , ii) Θέτω u=$\sqrt[6]{x}$ , iii) Θέτω u=$\sqrt{x+1}$, iv) Θέτω u=$\sqrt[6]{x+1}$, v) Θέτω u=$\sqrt{1+\ln x}$, vi) Θέτω u=$\sqrt{x-1}$.

64. i) 4/3, ii) 2-3e$^{-1}$, iii) ln2, iv) Θέτω u=$\sqrt{1-x}$ , v) $\dfrac{1}{2}(1+e^{\pi})$, vi) $\dfrac{\pi}{8}$.

65. i) π/4, ii) $\dfrac{2-\pi}{2}$, iii) $\dfrac{3-2\ln 2}{2}$,

iv) Γίνεται: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=...$ Θέτω u=συνx

v) Όμοια με το προηγούμενο.

yi) Θέτω 1=ημ$^2$x+συν$^2$x και το χωρίζω σε απλά κλάσματα.

vii) $\displaystyle\int_0^{\pi}\eta\mu^3 x dx=\int_0^{\pi}\eta\mu^2 x\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\eta\mu x dx=......$ Θέτω u=συνx.

viii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\eta\mu 2x}dx=\ldots$ όπως το iv). ix) 0.

66. $\mathrm{B}+\mathrm{A}=\dfrac{\pi^2}{8}$, $\mathrm{B}-\mathrm{A}=-1$, $\mathrm{A}=\dfrac{\pi^2+8}{16}$, $\mathrm{B}=\dfrac{\pi^2-8}{16}$.

67. $\mathrm{B}+\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{4}$, $\mathrm{B}-\mathrm{A}=-\dfrac{\ln 2}{2}$, $A=\dfrac{\pi+2\ln 2}{8}$, $B=\dfrac{\pi-2\ln 2}{8}$.

68. α) Με τον ορισμό της συνέχειας δείχνω ότι η f είναι συνεχής στο 1 άρα και στο π. ορισμού της. β) $I=\int_0^1(e^x-ex)dx+\int_1^2 x\ln x dx=\ldots$

69. Όμοια με την 68.

70. Όμοια με την 68

71. i) $\int_0^1 1dx+\int_1^2(2x-1)dx=.....$ ii) $\int_0^1(-x^2+1+x)dx+\int_1^2(x^2-1+x)dx$

iii) $\int_{-1}^0(1-e^x)dx+\int_0^1(e^x-1)dx=...$ iv) $\int_{\frac{1}{2}}^1(-x\ln x)dx+\int_1^2(x\ln x)dx=....$

72. i) ln(3/2), ii) ln3, iii) $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$, iv) $\dfrac{\ln \frac{3}{2}-7\ln 2}{4}$,

v) Ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων. vi) Ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

73. Το πρώτο μέλος γίνεται: $\int_\alpha^\beta x\,\mathrm{f}''(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\int_a^\beta x\left(\mathrm{f}'(\mathrm{x})\right)'dx=..$ (παραγοντική).

74. Το πρώτο μέλος γίνεται: $\int_a^\beta(\mathrm{f}'(x))'g(x)dx=....$ (παραγοντική).

75. 0.

76. –3.

77. i) 0, ii) 0.

78. 0.

79. –1.

80. 0.

**Θεωρητικές στην αντικατάσταση μεταβλητής.**

81. i) Θέτω u=x-γ, dx=du. ii) Θέτω u=$\dfrac{x}{\gamma}$, $dx=\gamma du$. iii)Θέτω u=α+β-x, dx=-du.

82. i) Θέτω u=lnx στο πρώτο μέλος. ii) Θέτω u=1-e$^x$ στο πρώτο μέλος.

83. Θέτω u=2x-1. I=-1/2.

84. Από το β’ μέλος θέτω x=f(u) άρα dx=f ΄(u)du….

85. Ισχύουν: f(0)=0. f(α)=β, f$^{-1}$(β)=α. Θέτω x=f(u) στο δεύτερο ολοκλήρωμα……

86. Ολοκληρώνω κατά μέλη τη δοθείσα ισότητα και κάνω αλλαγή μεταβλητής: α+β-x=u. Η c προσδιορίζεται από την δοθείσα για x=$\frac{\alpha+\beta}{2}$.
87. Ολοκληρώνω κατά μέλη τη δοθείσα ισότητα και κάνω αλλαγή μεταβλητής u=1-x. Έχει τιμή 1.
88. Έχει τιμή 1.
89. Ολοκληρώνω κατά μέλη τη δοθείσα ισότητα με άκρα –1 και 1 και κάνω αλλαγή μεταβλητής u=-x.
90. i) Αντικατάσταση και πράξεις. Λαμβάνουμε υπόψιν ότι: συν(-x)=συνx.
ii) Ολοκληρώνω κατά μέλη τη σχέση του i) ερωτήματος και κάνω αλλαγή μεταβλητής u=-x.
91. Ολοκληρώνω κατά μέλη τη δοθείσα ισότητα και κάνω αλλαγή μεταβλητής: α+β-x=u. Με βάση τη σχέση αυτή το ολοκλήρωμα γίνεται: $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ στο οποίο κάνω αλλαγή μεταβλητής συνx=u.
92. i) Στη δοθείσα ισότητα για x=ψ=0 παίρνω f(0)=0. Με βάση αυτή και θέτοντας όπου ψ το –x παίρνω τη σχέση του i).
ii) Ολοκληρώνω αυτή κατά μάλη και θέτω –x=u. Η τιμή του ολοκληρώματος είναι 1.
93. Ολοκληρώνω τη δοθείσα σχέση με άκρα –α και α και στα ολοκληρώματα που προκύπτουν κάνω αλλαγή: στο πρώτο θέτω u=x-α, στο δεύτερο θέτω u=x+α……..
94. Ολοκληρώνω κατά μέλη τη δοθείσα ισότητα και κάνω αλλαγή μεταβλητής: α+β-x=u και στα δύο μέλη.
95. i) Το πρώτο μέλος γράφεται: $\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\int_0^{\pi}x\,\mathrm{f}(\eta\mu x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}x\,\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=$ (στο δεύτερο θέτω u=2π-x)….
ii) Το πρώτο μέλος γράφεται: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{f}(\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\,\mathrm{f}(\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$ (στο δεύτερο θέτω u=π-x).
96. i) Το πρώτο μέλος γράφεται: $\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{f}(x)dx=\int_{-\alpha}^{0}\mathrm{f}(-x)dx+\int_0^{a}\mathrm{f(x)\,dx}=...$ (στο πρώτο θέτω u=-x)
ii) Το πρώτο μέλος γράφεται: $\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{f}(x)dx=\int_{-\alpha}^{0}-\mathrm{f}(-x)dx+\int_0^{a}\mathrm{f(x)\,dx}=...$ (στο πρώτο θέτω u=-x)
97. i) Το πρώτο μέλος γράφεται: $\int_0^{\pi}x\,\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\int_0^{\pi}x\,\mathrm{f}(\eta\mu(\pi-\mathrm{x}))\,\mathrm{dx}$ και θέτω π-x=u και καταλήγω στο δεύτερο μέλος. Το δεύτερο μέλος γράφεται: $\int_0^{\pi}\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{f}(\eta\mu\,\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$. Στο δεύτερο ολοκλήρωμα κάνω την αλλαγή μεταβλητής u=π-x και καταλήγω στο τρίτο μέλος.

**Αναγωγικοί τύποι στο ορισμένο ολοκλήρωμα.**

98.
99.
100.
101.

**Ανισότητες και ορισμένο ολοκλήρωμα.**

102. α) Μελετούμε την μονοτονία της g(x)=f(x)-f(α)-f ΄(β)(x-α) στο [α,β].
β) Ολοκληρώνουμε κατά μέλη τη σχέση του α) ερωτήματος.
103. α) Ισχύει ότι f(x)-α>0 και f(x)-β<0 άρα (f(x)-α)(f(x)-β)<0 $\Leftrightarrow$ ……..
β) Ολοκληρώνουμε κατά μέλη τη σχέση του α) ερωτήματος.
104. Για τη συνάρτηση h(x)=f(x)-g(x) ισχύει ότι: h(x)$\geq 0$ και ότι δεν είναι παντού 0 γιατί υπάρχει $x_0$ τέτοιο, ώστε: $h(x_0)\neq 0$. Άρα $\int_{\alpha}^{\beta}h(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}>0\Rightarrow$ …….
105. α) Ολοκλήρωση κατά μέλη της προφανούς ανισότητας $m\leq \mathrm{f(x)}\leq M$ στο διάστημα [α,β] β) Η συνάρτηση $\mathrm{f(x)}=\sqrt{\mathrm{x}^2+1}$ έχει ελάχιστο το 1 και μέγιστο το $\sqrt{2}$. Άρα με εφαρμογή του α)…..
106. α) Προφανής συνέπεια της γνωστής ανισότητας $|\eta\mu x|\leq |x|,\ x\in\Re$.
β) $\eta\mu x\leq x\Rightarrow\frac{\eta\mu x}{x^2+1}\leq\frac{x}{x^2+1}$ και με ολοκλήρωση κατά μέλη…..
107. Μελετάμε κάθε φορά την αντίστοιχη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα και παίρνουμε ανισότητα της μορφής $m\leq \mathrm{f(x)}\leq M$ την οποία ολοκληρώνουμε κατά μέλη.
108. $(\mathrm{f(x)}-1)^2\geq 0\Leftrightarrow ....$
109. $(\mathrm{f(x)}-\mathrm{x})^2\geq 0\Leftrightarrow .........$

110. i) Μελετώντας τα ακρότατα της f(x)=$e^{-x}$ βρίσκουμε ότι: $\frac{1}{e^{\beta}} \le e^{-x} \le \frac{1}{e^{\alpha}} \Rightarrow$ .....

ii) Από την ανισότητα $x^2\eta\mu x \le x^2$ με ολοκλήρωση κατά μέλη…….

iii) $1 \le 2^x \le 2$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$......... iv) $x^4\sigma\upsilon\nu^2 x \le x^4$ ………..

111. i) Δείχνω ότι η f(x)=elnx-x, x.>0 έχει μέγιστο το 0. ii) Είναι $e\ln x \le x \Leftrightarrow \ln x^e \le \ln e^x \Leftrightarrow x^e \le e^x$. Άρα για την h(x)=$x^e$-$e^x$ ισχύει: h(x) $\ge$ 0 και δεν είναι παντού 0 στο [1,17] άρα με ολοκλήρωση κατά μέλη…….

112. Μελετώντας τα ακρότατα της $f(x)$ βρίσκω ότι $\frac{1}{\sqrt{5}} \le f(x) \le \frac{1}{2}$ άρα………

**Πεδίο ορισμού-Παράγωγος-Ολοκλήρωμα.**

113. i) $A=(-\infty,2)$, ii) $A=[1,+\infty)$, iii) $A=(-2,1)$, iv) A=[e,3],

v) $A=[0,3)\cup(3,4]$., vi) $A=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, vii) A=(3,6),

viii) $A=\left[\frac{1}{e},\ln 2\right]$.

114. Γράφεται πρώτα: $F(x)=(x^2-x+1)\cdot\int_0^{x^2} f(t)\,dt$ και μετά κανόνας γινομένου.

115. α) Εφαρμογή του ορισμού της συνέχειας στο 0. β) $F'(x)=\frac{1}{2}x\ln(4+3x\sqrt{x})$.

116. i) Γράφεται πρώτα: $f(x)=(2x+4)\int_1^x \sigma\upsilon\nu t dt$

ii) Γράφεται πρώτα: $f(x)=e^{2x-1}-x\int_1^x e^t dt+\int_1^x te^t dt.$

iii) Γράφεται πρώτα: $f(x)=2x^3\cdot\int_0^x\left(\int_2^t\sqrt{u^2+2u+7}du\right)dt$

117. i) $f'(x)=2+x\,\eta\mu\, x+\int_0^x \eta\mu t dt.$

ii) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}-\frac{x-1}{x}\sigma\upsilon\nu x-(2x-1)\int_1^x\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t^2}dt.$

iii) Γίνεται $f(x)=-3\ln x-\frac{1}{2}\int_x^{2x}\ln t dt \Rightarrow f'(x)=$............

118. i) Θέτω 3x-2t=u….. ii) Θέτω xt=u…… iii) Θέτω $\frac{x}{t}=u$ ……

iv) $h(x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{2-x} f(t)\,dt+x\int_0^{x-1} f(t)\,dt$ .....

119. Είναι $F'(x)=e^{x^2}$. $I=\int_0^1 x'F(x)dx==\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xe^{x^2}dx=...=\frac{1-e}{2}$.

120. Όμοια: $I=-\frac{\eta\mu 4}{2}$.

121. i) Θεωρώ $F(x)=\int_1^x\frac{3x^2}{1+t^2}dt\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \ A=\int_0^1 x'F(x)dx=$...... ii) Όμοια με i).

**Σταθερή συνάρτηση- υπολογισμός τιμής.**

122. Είναι F ΄(x)=0 άρα είναι σταθερή και έχει τύπο F(x)=0.
123. Είναι F ΄(x)=0 άρα είναι σταθερή και έχει τύπο F(x)=0.
124. α) Η δοσμένη σχέση δίνει $f'(x)=\frac{f(x)}{x}, x>0$. Με βάση αυτή βρίσκω g ΄(x)=0 άρα η f είναι σταθερή στο [ο,+ ∞ ) γιατί είναι συνεχής σε αυτό.

β) f(x)=x.

125. α) Είναι g ΄(x)=0 με τη βοήθεια της δοσμένης ισότητας. β) Α=1.
126. Είναι f ΄΄(x)=f(x), οπότε: g ΄(x)=…..=0.
127. Είναι F΄(x)=0 άρα είναι σταθερή και έχει τύπο F(x)=0 (υπολογίζω το c για x=1 )
128. Είναι F΄(x)=0 άρα είναι σταθερή και έχει τύπο F(x)=0 (υπολογίζω το c για x=0 ).

**Εύρεση τύπου συνάρτησης.**

129. Παραγωγίζω κατά μέλη και βάζω όπου x το 1. Είναι f(1)=1.
130. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
β) f(x)=x-ln(x+1).
131. i) f(x)=-ημx, α=0. ii) f(x)=$3x^2$, α=-1.
132. f(x)=2-συνx.
133. f(x)=2+ημx.
134. f(x)=3-1/x, x>0.
135. f(x)=ln(1+x), x $\geq$ 0.
136. $f(x)=\frac{1+e}{e}\cdot x-\frac{x}{\ln x}$.
137. f(x)=$2006e^{x-1}$.
138. Παραγωγίζω τη δοσμένη και βρίσκω f(-x)=-f(x). Αντίστροφα, ολοκληρώνω κατά μέλη την f(-t)=-f(t) από –x έως x .
139. f(x)=-1/2ln(1+$e^{-x}$)+1+1/2ln2.
140. i) f(x)=$2e^x$(x-1)+2. ii) f(x)=0.
141. i) f(x)=-xσυνx+x, ii) f(x)=ημ$x^2$-$x^2$συν$x^2$, iii) f(x)=$\frac{1}{3}(e^{2x}+2e^{-x})$, iv) f(x)=$e^{1-x-e^{-x}}$.
142. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}},\ x>0.$
143. i) $f(x)=1-2e^{x-1}$, ii) $f(x)=0$, iii) $f(x)=\frac{3}{2}e^{2x-2}-\frac{1}{2}$.

**Όρια.**

144. i) 0, ii) 0.
145. 3.
146. i) 2006, ii) 2006.
147. i) $\frac{1}{4},\ ii)\ \frac{1}{2},\ iii)\ \frac{1}{2},\ iv)\ 0.$
148. 1.
149. $i)-\infty,\ ii)\ 0,\ iii)\ 0.$
150. –4.
151. 1.

**Μελέτη συνάρτησης.**

152. Είναι g΄΄(1)=0, g΄΄(x)=2f(x)+xf ΄(x) και για x=1 παίρνουμε $f(1)=-\frac{1}{2}f\,'(1)$. Αλλά $g\,'(x)=\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)$ και για x=1……
153. α) Γν. αύξουσα στο [0,3]. Ελάχιστο το f(0)=0 και μέγιστο το f(3)=$\int_0^3|x-1|\,dx=\frac{5}{2}$.
β) $f(A)=\left[0,\frac{5}{2}\right]$.
γ) Είναι κοίλη στο [0,1] και κυρτή στο [1,3] και δεν έχει σημεία καμπής.

154. i) $(0,+\infty)$.
ii) Είναι F(1)=0. F(x)<0 στο (0,1) και F(x)>0 στο $(1,+\infty)$ γιατί η F είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
iii) $\searrow\ \sigma\tau o\ (0,1]\ \kappa\alpha\iota\ \nearrow\ \sigma\tau o\,[1,+\infty)$. Έχει ελάχιστο για x=1.

155. i) A=(0,1).
ii) $\searrow\ \sigma\tau o\left(0,\frac{1}{e}\right),\nearrow\ \sigma\tau o\left(\frac{1}{e},1\right)$, ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$. Είναι κυρτή στο $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ και κοίλη στο $\left(\frac{1}{e^2},1\right)$. Σ. καμπής για x=$1/e^2$.

156. i) A=$(-\infty,0)$.
ii) $\nearrow\ \sigma\tau o\,(-\infty,-1],\ \searrow\ \sigma\tau o\,[-1,0)$. iii) Έχει μέγιστο το f(1)= $2\sqrt{e}-e,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \ldots$

157. Μοναδική ρίζα x=1.

158. Επειδή η f είναι περιττή ισχύει f(-x)=-f(x) και για x=0 παίρνω f(0)=0. Είναι g΄΄΄(x)=2f(x) που είναι γν. αύξουσα στο $\Re$ και έχει μοναδική ρίζα το 0 γιατί g΄΄΄(0)=0. Από τη μονοτονία της g΄΄΄ βρίσκω το πρόσημο της g΄΄ . Είναι g΄΄(x) $\geq$ 0 άρα η g είναι κυρτή στο $\Re$ .

159. i) A[-2,2].
ii) $\nearrow \sigma\tau o\ [-2,2]$, έχει ελάχιστο για x=-2 και μέγιστο για x=2.

160. Για x $\neq$ 0 κάνουμε αλλαγή μεταβλητής xt=u και η g παίρνει τη μορφή $g(x)=\dfrac{\int_0^x u\,\mathrm{f(u)\,du}}{x^2}$ και για x=0 είναι g(0)=f(0)/2.. Αρκεί να δείξω ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$......

161. Α. i) A= $[1,+\infty)$ .
ii) f $\nearrow$ $\sigma\tau o\ [1,+\infty)$. iii) Μοναδική ρίζα το 2.
Β. $\searrow$ $\sigma\tau o\ [1,2]$, $\nearrow$ $\sigma\tau o [2,+\infty)$ . Ελάχιστο για x=2 και μέγιστο για x=1.

162. f ΄(0)=0 και $g''(x)=2\int_0^x \mathrm{f(t)\,dt}+4\,x\mathrm{f}(x)+\ (1+x^2)\,\mathrm{f}\,'(x)$ άρα g ΄΄(0)=0.

163. α) $\psi=\dfrac{1}{2}x$. β) f ΄(x)= $\dfrac{1}{2x}>0$, και f ΄΄(x)= $-\dfrac{1}{2x^2}<0$

**.Συνάρτηση $\int_\alpha^x \mathrm{f(t)\,dt}$ και υπαρξιακά θεωρήματα.**

164. α) Θεωρούμε τις $F(x)=\int_a^x \mathrm{f(t)\,dt}$ και $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ και εφαρμόζουμε Θ.Rolle στην φ(x)=F(x)-G(x) στο [α,β].
β) Συμπέρασμα από το α).

165. Θ. Rolle στην $F(x)=\int_a^x \mathrm{f(t)\,dt}$ στο [α,β].

166. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με το αν η f είναι ή δεν είναι παραγωγίσιμη στο (0,2).

167. α) Αν F είναι αρχική της f στο [λ, λ+1], προκύπτει από Θ.Μ.Τ. στην F στο [λ, λ+1].
β) Θ. Rolle στην f στο [λ, $x_0$].

168. Έστω Fαρχική της f στο [0,2006]. Από Θ.Μ.Τ για την F υπάρχει $x_0 \in$ (0,2006) ώστε f($x_0$)=-f(2006).. Μετά Θ. Bolzano στο [$x_0$, 2006] για την f.

169. α) Έστω $F(x)=\int_2^x \mathrm{f(t)\,dt}$ αρχική της f στο [-1,1]. Από Θ.Bolzano για την F στο [-1,1] βρίσκω ότι
$\exists\, a\in(-1,1): F(a)=0 \Rightarrow \int_a^2 \mathrm{f(t)\,dt}=0.$
β) Θ. Rolle στην F στο [α,2].

170. Αν F(x)= $\int_0^x \mathrm{f(t)\,dt}$ αρχική της f στο [0,2].
α) Θ. Bolzano για την F στο (1,2) $\subseteq$ (0,2).
β) Θ. Role για την F στο (0,α) $\subseteq$ (0,2).

171. Η δοσμένη γίνεται αf ΄(α)=βf ΄(β). Εφαρμόζω Θ. Rolle στην g(x)=xf ΄(x) στο [α,β].

172. Θ. Rolle για την $h(x)=\int_a^x \mathrm{f(t)\,dt}\cdot\int_x^\beta \mathrm{f(t)\,dt}$ στο [α,β].

173. Θ. Rolle για την $h(x)=\frac{1}{x}\cdot\int_a^x \mathrm{f(t)\,dt}$ στο [α,β].

174. Θ. Rolle για την $g(x)=\int_1^{x-1}\mathrm{f(t)\,dt}-\int_1^{1-x}\mathrm{f(t)\,dt}$ στο [0,1].

175. α) Θ. Bolzano στην $h(x)=2\cdot\int_0^x \mathrm{f(t)\,dt}-1$ στο [0,1].

β) Θ. Rolle για την $g(x)=x\cdot\int_0^x \mathrm{f(t)\,dt}-\mathrm{x}$, στο [0,1].

176. α) Κανόνας γινομένου.
β) Ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις. Ειδικά f(1)=f(2)=0.
γ) Άμεση συνέπεια του β).

177. α) Για t=0…. f(0)=0. Μετά περιπτώσεις για t>0 και για t<0 και κρ. παρεμβολής ώστε να βρώ το όριο $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\mathrm{f(t)}-1}{\mathrm{t}}$ .

β) Κανόνας Hospital.

γ)Θ. Bolzano για την $F(x)=1+x^2-2\cdot\int_0^x f(t)dt$ στο [0,1] και μονοτονία της F για τη μοναδικότητα.

178. Θ. Bolzano για την $h(x)=\int_1^x \mathrm{f(t)}dt-x^2+3$ στο [1,2] και μονοτονία της h για τη μοναδικότητα.

179. Θ. Bolzano για την $h(x)=g(x)-3x+2$ στο [0,2] και μονοτονία της h για τη μοναδικότητα.

180. Θ.Μ.Τ. για την F στο [0,1].

181. Έστω η $g(x)=\int_0^x\left(\int_1^t \mathrm{f}(u)du\right)dt-1+e^x$ . Είναι g(x)$\geq$0 και g(0)=0. Δηλαδή η g έχει ελάχιστο το 0 για x=0.

Άρα από θ. Fermat g΄(0)=0$\Longrightarrow$ $\int_0^1 \mathrm{f(x)\,dx}=1$. (1) Αν F αρχική της f στο [0,1] , η (1) δίνει $\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=1$ οπότε από Θ.Μ.Τ φια την F στο [0,1] παίρνω f($x_0$)=1………

182.

183. Αν F αρχική της f , η δοσμένη σχέση δίνει F(2)-F(-1)=f(2). Από Θ.Μ.Τ στο [-1,2] για την F παίρνουμε f(ξ)=f(2), έπειτα Θ.Rolle στο[ξ,2] για την f ……..

184. Από Θ. Fermat στην $g(x)=\int_{x+a}^{x+\beta}\mathrm{f(t)\,dt}-\int_{\mathrm{a}}^{\beta}\mathrm{f}(x)dx$ παίρνουμε g΄(0)=0$\Longrightarrow$ f(α)=f(β). Μετά Θ. Rolle για την f στο [α,β] από όπου f ΄(ξ)=0, ξ$\in$(α,β).

185. A(e,2).

186. Θ. Fermat στην $g(x)=\int_0^x \mathrm{f(t)\,dt}-2^x-a^x+3^x+5^x$ . α=15/2.

187. Στις απαντήσεις των θεμάτων του 2005.

188. α) Η h(x)=f(x)-x-f(0) είναι γν. φθίνουσα στο [0,1] και h(0)=0 άρα h(x)$\leq$0 στο [0,1].
β) Με ολοκλήρωση κατά μέλη της α).

γ) Έστω $g(x)=1+\int_0^x \mathrm{f(t)\,dt}-\mathrm{x}$. Εφαρμόζουμε Θ.Rolle στην g στο [0,1] και μονοτονία της g ( ↘ ) για τη μοναδικότητα.

**Εφαρμογή του ολοκληρώματος στα εμβαδά επιπέδων χωρίων.**

189. $\frac{16}{3}\ \tau.\mu.$

190. $E(\Omega)=\int_{-3}^{2} f(x)\,dx-\int_{-2}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{4} f(x)\,dx=\ldots\ldots..$

191. Εξετάζω πρώτα τη συνέχεια στα σημεία 0 και 1. $E(\Omega)=\int_{-1}^{0}(3-x)dx-\int_{0}^{1}-(x-1)(x-3)dx+\int_{1}^{2}4xdx=\ldots\ldots\ldots$

192. 36 τ.μ.

193. α) $\frac{27}{4}$ τ.μ. β) $\frac{32}{3}$ τ.μ. γ) $\frac{27}{2}$ τ.μ.

194. α) $E(\Omega)=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\ldots.=\frac{32}{3}$

β) $E(\Omega)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\ldots\ldots.=\frac{4}{3}$

195. Θα δείξουμε ότι είναι ίσα τα $E_1=\int_0^4\left(-x^3+6x^2-9x+4\right)dx$ και $E_2=\int_0^4\left(x^3-6x^2+9x\right)dx$

196. i) $E(\Omega)=\int_0^1(-3x^2+3x)dx$, ii) $E(\Omega)=-\int_1^2\frac{2x^2-3x+1}{x}dx$,

iii) $E(\Omega)=-\int_0^{2/3}(3x^2-2x)dx$, iv) $E(\Omega)=2\cdot\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}+4x^2-5\right)dx$

197. α) 4 τ.μ. β) 5 τ.μ.

198. $\frac{e^2-1}{2}$ τ.μ.

199. i) ψ=x+2. ii) $E(a)=\ln 2-\ln(1+e^a)$. iii) ln2 iv) $-\frac{2}{3}\ \tau.\mu./\sec$.

200. α=ln2.

201. i) $E(a)=\frac{1}{2}\cdot\left(3a^4-4a^3+8\right)$ ii) α=1, E(1)=$\frac{7}{8}$.

202. i) α=0, ii) ψ=0 στο $-\infty$ και ψ=1 στο $+\infty$. iii) $E=\frac{3e-4}{2e}$.

203. i) f(x)=lnx, x>0. ii) E(Ω)=4e-5 τ.μ.

204. i) Θέτω x-t=u και παίρνω $f(x)=e^x+\int_0^x f(u)du\Rightarrow\ldots\ldots$ ii) E(Ω)=e τ.μ.

205. i) α=0, ii) E(Ω)=7/12 τ.μ.

206. α) $f(x)=\frac{2}{\eta\mu\,x}$, β) E(Ω)=ln3 τ.μ.

207. Ε(Ω)=2(1-ημ1) τ.μ.

208. Α) α) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. β) Ε(Ω)=$e^2$-e τ.μ. Β) Ε(Ω)=e τ.μ.

209. Α) α) f(x)= $x\cdot e^{\frac{1}{x}}$. β) $E=e-e^{\frac{1}{e}}\ \tau.\mu.$ Β) β) Ε=e τ.μ.

210. α) $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$. β) $E=\frac{e^3-7}{3}\tau.\mu.$

211. $f(x)=e^x+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\eta\mu 2x-\frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{1}{8}$. $E(\Omega)=\int_0^{\pi/4}f(x)\,dx=.......$

212. α) f(x)=3x-2. β) Ε(Ω)=5/6 τ.μ.

213. i) f(x)=lnx-1, ii) Ε(Ω)=e-2 τ.μ.

214. α) $f(x)=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sigma\upsilon\nu x}$. β) Ε(Ω)=8/3 τ.μ.

215. α) f(x)=ln(x+1). $E=\ln\left(\frac{4}{e}\right)-\frac{(e+1)\ln(e+1)}{e}\tau.\mu.$

216. $E=\frac{1}{3}e^3-e+\frac{2}{3}\tau,\mu,$

217. α) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$. β) $E=8-2\ln\left(\frac{7}{3}\right)\tau.\mu.$

218. Θ. Fermat στην $g(x)=\int_0^x\left(\int_1^t f(u)\,du\right)dt-1+e^x\geq 0$ Ε(Ω)=1 τ.μ.

219. α) Θ. Fermat στην $g(x)=\int_0^{2x-1}\left(\int_t^1 f(u)\,du\right)dt-\frac{1}{\sqrt{e}}+e^{-x}$. Έχει ελάχιστο το 0 για x=1/2. $E(\Omega)=\frac{1}{2\sqrt{e}}\tau.\mu.$

β) Θ. Fermat στην $g(x)=\int_0^{x-2}\left(\int_2^t f(u)\,du\right)dt+e^{-2}-e^{-x}\geq 0$ που έχει ελάχιστο το 0 για x=2. Ε=2$e^{-2}$ τ.μ.

**<u>Γενικά θέματα στα ολοκληρώματα</u>**

220. α) Επειδή f κυρτή, η f ΄είναι $\nearrow$ στο [0,1]. Υπολογίζω το γινόμενο $z_0z_1$ και βρίσκω f ΄(0)f ΄(1)=-Re($z_0z_1$)<0 άρα από Θ. Bolzano για την f ΄στο [0,1] …….

β) i) Ελάχιστο. Είναι f(x)>0 για $x\neq\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

ii) Είναι $\int_0^{1/2}f(x)\,dx=2$. Εφαρμόζω Θ. Rolle στην $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-4x$ $\sigma\tau o$ $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και επειδή f ΄ $\nearrow$ το ξ είναι μοναδικό.

221. α) Η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\frac{-4\alpha x}{x^2+\alpha^2+\beta^2}$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

β) Από τη δοσμένη σχέση με ύψωση στο τετράγωνο προκύπτει α>0.
i) Έχει τ.μ. το f(-1)=2α και τ.ε.το f(1)=-2α και π. τιμών το σύνολο [-2α, 2α].
ii) Ε(α)=2αln($α^2$+1).

222. α) Από $z \notin \Re$ *και* $z + \frac{1}{z} \in \Re$ προκύπτει ότι: $|z| = 1$.

β) Από $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = 0$ προκύπτει ότι: $z\overline{w} + \overline{z}w = 0$.

i) Με ύψωση στο τετράγωνο της $f(x) = |z + xw|$ και πράξεις προκύπτει ότι $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ .

ii) Ε(Ω)=$\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

223. β) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

γ) f $\searrow$ *στο* $(0,+\infty)$, *κυρτή σ' αυτό.* ε) Θ. Bolzano στην $g(x) = e^{\frac{1}{x}} - \int_1^2 f(x)\,dx$ στο [1,2] ή Θ.Μ.Τ. στην $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ στο [1,2].

224. γ) $\searrow$ *στο* $\left(0, 1 - \frac{1}{2}\ln 5\right]$, $\nearrow$ *στο* $\left[1 - \frac{1}{2}\ln 5, +\infty\right)$. Έχει ελάχιστο το $f\left(1 - \frac{1}{2}\ln 5\right) = \frac{\ln 5 - 2}{2}$.

225. β) f $\searrow$ *στο* $(0,1]$, $\nearrow$ *στο* $[1,+\infty)$. Έχει ελάχιστο το f(1)=0 άρα μοναδική ρίζα το 0 και f(x)>0 για κάθε x $\neq 1$ γ) $\psi = \frac{1}{4}x + \ln 2 - 1$. δ) $E = \frac{1}{8}e^2 - \frac{7}{2} + (1+e)\ln 2$.,

226. α) Θ. Fermat για την g.

β) Θ. Bolzano στην $\phi(x) = \int_0^x \left(3f(t) - \frac{1}{t+1}\right)dt - 1$ στο [0,1].

γ) Θ.Rolle στην $F(x) = \int_0^x f(t)dt - 2x^2 + x$ στο [0,1].

227. α) Θ. Fermat για την g(x)= $3x + x\int_1^x f(u)\,du - e^x + \sigma\upsilon\nu 2x$ .

β) Θ. Bolzano στην $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt + x - 1$, στο [0,1].

γ) ) Θ.Rolle στην $F(x) = \int_0^x f(t)dt - x^2 - x$ στο [0,1].

228. Α) F(x)=0, για κάθε x$\in \Re$ . Β) Ε(Ω)=3/2 τ.μ.

229. α) x=2.

β) g κυρτή στο $(-\infty, 2]$ και κοίλη στο $[2,+\infty)$. Σ. καμπής το (2,0).

γ) Θ.Μ.Τ. στην g στα διαστήματα [2,3] και [3,4].

230. α) Θ.Rolle στην $g(x) = \int_1^x t\,f(t)\,dt - x$ *στο* $[1,2]$

β) $F \nearrow$ *στο* $[1,2]$.

γ) Θ. Bolzano στην F στο [1,2]. δ) Ε(Ω)=1/2 τ.μ.

231. α) $F \searrow$ *στο* $(-\infty,1]$, $\nearrow$ *στο* $[1,+\infty)$ . Έχει ελάχιστο το F(1)=0 και είναι κυρτή στο $\Re$. β) Κανόνας Hospital.

232. α) ψ=-x+2.

β) Θ. Bolzano στην f στο $[x_1,x_2]$. γ) Ε(Ω)=2 τ.μ.

233. β) 0, γ) Ε(Ω)=$\frac{1}{4}$ ln3 τ.μ.

234. Η $g(x)=\int_x^{x^2} \mathrm{f(t)\,dt} - x^2 + x$ έχει ελάχιστο το 0 για x=0 και για x=1. Επομένως ισχύει το Θ. Fermat στο 0 και στο 1 και παίρνουμε f(0)=f(1)=1. Από Θ.Rolle στην f(x) στο διάστημα [0,1] προκύπτει το ζητούμενο.

235. α) Η g είναι γν. φθίνουσα στο [α,β].
β) Επειδή η g είναι γν. φθ. , για α<β ισχύει: g(α)>g(β) $\Longrightarrow$ …………..

236. β) $\mathrm{f}(x)=x+\frac{\pi}{4},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

237. α) Είναι $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=-2\,\mathrm{x}e^{-\mathrm{x}^2}<0$ στο (0,1) άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο[0,1] δηλαδή είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Βρίσκουμε: $\mathrm{f}^{-1}(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)},\ \ x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$.
β) Στο $\int_1^{\frac{1}{e}}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}dx$ θέτω $x=e^{-u^2}$ και βρίσκω ότι $\int_1^{\frac{1}{e}}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}dx=\frac{1}{e}-\int_0^1 e^{-x^2}dx \Leftrightarrow$ ….

238. α) Θέτω x-t=u και παίρνω: $F(x)=\int_\gamma^{x-\alpha}\mathrm{f(t)\,dt}-\int_\gamma^{x-\beta}\mathrm{f(t)\,dt},\ \ \gamma\in\Re$. Επειδή η f είναι συνεχής, οι δύο παραστάσεις του δεύτερου μέλους είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις άρα η F είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
β) Είναι F΄(x)=f(x-α)-f(x-β), x $\in\Re$ άρα από F΄($x_0$)=0 $\Leftrightarrow$ f($x_0$-β)=f($x_0$-α) (1). Επειδή η f΄(x)>0 η f θα είναι και 1-1. Άρα από την (1) παίρνουμε $x_0$-β=$x_0$-α $\Leftrightarrow$ α=β. Οπότε : $F(x)=\int_\alpha^\alpha \mathrm{f(x-t)\,dt}=0,\ \mathrm{x}\in\Re$.

239. Η f ως γν. αύξουσα είναι και 1-1 άρα και αντιστρέψιμη. Η $\mathrm{f}^{-1}$ είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο f(Δ)=[f(0),f(α)]=[0,β]. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^\beta \mathrm{f}^{-1}(t)dt$ θέτω t=f(x)…….

240. Β)α) Α= $(0,+\infty)$ , F(x)= $x+\frac{1}{x}-2$ β)Ε(Ω)=-1/2+ln2 τ.μ.

241. α) Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση ως προς ψ και βάζουμε όπου ψ το 1.
β) x=1. γ) $E(\Omega)=\frac{e^2-3}{4e^2}\,\tau.\mu.$

242. β) Ε(Ω)=ln2-1/2 τ.μ. γ) ψ=1 στο $+\infty$ και ψ=0 στο $-\infty$ .

243. Ισχύει f(x+T)=f(x) για κάθε x $\in\Re$ γιατί η f είναι περιοδική. Θεωρώ την συνάρτηση $F(\alpha)=\int_\alpha^{\alpha+\mathrm{T}}\mathrm{f(x)}dx=\int_0^{\alpha+T}\mathrm{f(x)\,dx}-\int_0^\alpha \mathrm{f(x)\,dx},\alpha\in\Re$ .Είναι $F'(\alpha)=\mathrm{f}(\alpha+\mathrm{T})-\mathrm{f}(\alpha)=0$ άρα η F είναι σταθερή, δηλ: F(x)=c, x$\in\Re$ . Για α=0 βρίσκω c= $\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{f(x)\,dx}$ άρα……….

244. α) Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε f(-x)=f(x) , x$\in$[-α, α]. Θα δείξουμε ότι η g είναι περιττή, δηλ. g(-x)=-g(x), x$\in$[-α, α]. Είναι: $g(-x)=\int_0^{-x}\mathrm{f(t)\,dt},\ \mathrm{x}\in[-\alpha,\alpha]$. Θέτουμε t=-u………
β) Όμοια.

245. Έστω $\mathrm{I}=\int_{-x}^{x}\mathrm{f(t)\,dt},\ \mathrm{x}\in\Re$. Θέτουμε t=-u $\Longrightarrow$ dt=-du , για t=-x είναι u=x και για t=x είναι u=-x, άρα:
$\mathrm{I}=\int_x^{-x}\mathrm{f(-u)(-du)}=\int_{-\mathrm{x}}^{\mathrm{x}}\mathrm{f(-u)\,d}u=\int_{-x}^{x}-\mathrm{f(u)\,du}=-\int_{-x}^{x}\mathrm{f(u)\,du}=-\mathrm{I}$. Άρα I=0

246. Όμοια με 232.

*.*.*.*.*.*.*.*.*