ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ- ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο πεδίο ορισμού της Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Σχόλια

- Αποδεικνύεται ότι αν μία συνάρτηση είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται ‘’κάτω’’ (αντίστοιχα ‘’πάνω’’) από την γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
- Η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος:

  Θεώρημα

  Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

  i) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

  ii) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

  iii) Το αντίστροφο του θεωρήματος **δεν ισχύει.**

Σημείο καμπής

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_o) και κοίλη στο (x_o, β) ή αντίστροφα και
- η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$, τότε το σημείο $A(x_o, f(x_o))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

<u>Επισημάνσεις για τις ασκήσεις</u>

- Όταν το $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει καμπή στο x_o** και το x_o λέγεται **θέση σημείου καμπής.**

  Στο σημείο αυτό η εφαπτομένη της C_f «διαπερνά» την καμπύλη της f.
- Αποδεικνύεται το εξής **θεώρημα:**

  Αν το $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη , τότε: $f''(x_0) = 0$.
- Αν f συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα διάστημα Δ, τότε, τα εσωτερικά σημεία στα οποία είναι $f''(x_o) \neq 0$ δεν είναι θέσεις σημείων καμπής.
- Οι **πιθανές θέσεις σημείων καμπής** μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ είναι:

  α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.

  β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.
- Αν f συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα διάστημα (α, β) και $x_o \in$ (α, β), τότε:

  α) Αν η f'' αλλάζει πρόσημο γύρω από το x_o και

  β) Αν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_o, f(x_o))$, τότε, το $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής.
- Η f είναι κυρτή στο Δ $\Leftrightarrow$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ ενώ αν η f είναι κοίλη στο Δ $\Leftrightarrow$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες:

i) $f(x)=4-x^2$ ii) $f(x)=3x^5-10x^3+1$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ iv) $f(x)=(x+2)e^{-x}$

2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής τους:

i) $f(x)=-x^5+10x^2+2$ ii) $f(x)=x^2+\dfrac{x+1}{x}$

iii) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$ iv) $f(x)=xe^{-x}$

v) $f(x)=\sigma\varphi x,\ x\in(0,\pi)$ vi) $f(x)=\begin{cases}2+x^3, & x\le 0\\ 2-x^3, & x>0\end{cases}$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=-x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Αν είναι γνωστό ότι η C_f διέρχεται από το σημείο Α(-1, 10), ότι έχει τοπικό ελάχιστο για x=-2 και ένα σημείο καμπής για x=1, τότε:

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ.

β) Να βρείτε το τοπικό μέγιστο της f.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha x^3-6(\beta-1)x^2+(8+\alpha)x+\alpha$.
α) Να βρεθούν τα α και $\beta\in\Re$, αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για x =1 και το (2, f(2)) είναι σημείο καμπής της f.
β) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, την κοιλότητα και τα σημεία καμπής.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\alpha x^2+12x-\beta$.

α) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η C_f έχει σημείο καμπής στο οποίο δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
β) Να βρείτε την τιμή του $\beta\in\Re$ έτσι ώστε η οριζόντια εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της να είναι ο άξονας χ΄χ.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+6x^2+9x+2$.
α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τ. μέγιστο, ένα τ. ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.
β) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της f και x_3 η θέση του σημείου καμπής της, να αποδείξετε ότι το σημείο $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι το μέσο του ευθ. τμήματος ΑΒ με $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$.

7. Αν για την συνάρτηση g ισχύει $g'(x)+g''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=g\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$ είναι κυρτή στο διάστημα $(0,+\infty)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=3\alpha x^3+3\beta x^2+(3\alpha+2\beta)x+18$. Να βρείτε τις τιμές των α και $\beta\in\mathfrak{R}$ για τις οποίες το σημείο Α(-1, 3) είναι σημείο καμπής της C_f και να δείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

9. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4+2x^3-(\mu+1)x-\mu,\ x\in\mathfrak{R}$.
α) Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.
β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία καμπής είναι κάθετες, τότε το μ ισούται με: Α: $\sqrt{2}$ Β: $-\sqrt{2}$ Γ: $\sqrt{2}$ ή $-\sqrt{2}$ Δ: 0

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)^5,\ x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδειχθεί ότι:
α) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{3}{x-\alpha}+\dfrac{5}{x-\beta},\ x\in(\alpha,\beta)$
β) Η συνάρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα (α, β).

11. Έστω μια συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύουν:
α) $f''(x)>4\big(f'(x)-f(x)\big)$ για κάθε $x\in R$ και
β) Η f έχει στο σημείο x_o τοπικό ακρότατο το 0.
Να αποδείξετε ότι:
i) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathfrak{R}$.
ii) $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathfrak{R}$.

12. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σ' ένα διάστημα Δ, και στο οποίο στρέφει τα κοίλα άνω. Να αποδειχθεί ότι, αν $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$, τότε ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

13. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2\sigma\upsilon\nu2\alpha+2x\sigma\upsilon\nu^2(2\alpha)+\eta\mu^2(2\alpha)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α, η γραφική παράσταση της f έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το οποίο, για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x+\beta^x+(\alpha\beta)^{-x}+2003,\ x\in\mathfrak{R}$. με $0<\alpha$ και $\beta\neq 1$. Να αποδείξετε ότι:
α) η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathfrak{R}$.
β) το $x_o=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f .
γ) $f(x)\geq 2006$ για κάθε $x\in\mathfrak{R}$.

15. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σ' ένα διάστημα [α, β], και στο η f οποίο στρέφει τα κοίλα άνω.
Α) Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2f\left(\dfrac{\alpha+x}{2}\right)+f(\alpha)$ είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β]
ii) $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}>f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$
Β) Έστω η συνάρτηση $F(x)=x\ln x,\ x>0$. Να αποδείξετε ότι:

i) η F στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$

ii) Αν 0<α<β, τότε: $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} > \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}$

16. Έστω συνάρτηση f που είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάποιο x_o εσωτερικό σημείο του Δ είναι $f''(x_o)=0$ και η $f^{(3)}$ είναι συνεχής στο x_o, με $f^{(3)}(x)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_o.

17. α) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σ' ένα διάστημα Δ, και στο οποίο στρέφει τα κοίλα κάτω. Αν α, β, γ ανήκουν στο Δ, με α<β<γ, να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} > \dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι :

i) Η στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0,+\infty)$,

ii) Αν 0<α<β<γ, τότε: $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\gamma-\beta} > \left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^{\beta-\alpha}$.

18. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\Re$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\alpha x^3+\dfrac{3}{2}x^2-5x+12$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $\Re$.

19. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^4}{3}+\dfrac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\dfrac{5}{2}\right)x^2+(\alpha^3+7)x-5\alpha^2,\ \alpha\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

20. Αν $f(x)=x^4+2\alpha x^3+54x^2-5x-7,\ \alpha\in\Re$, να προσδιορίσετε τις τιμές του α, ώστε η C_f να μην έχει σημεία καμπής.

21. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) η οποία στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq(x-\beta)f'(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

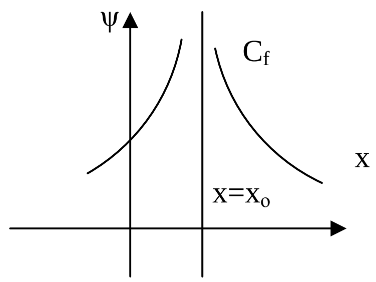
..*.*.*.*.*.*.*.*

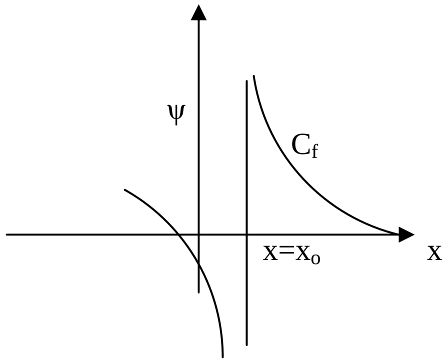
ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ-ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Κατακόρυφη ασύμπτωτη- Ορισμός

Η ευθεία $x=x_o$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, αν, ένα τουλάχιστον από τα όρια

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

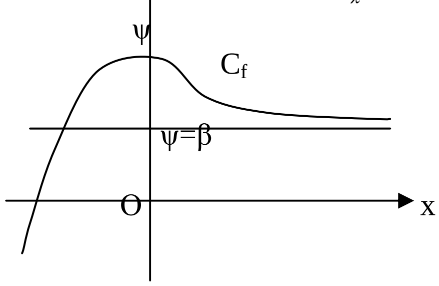


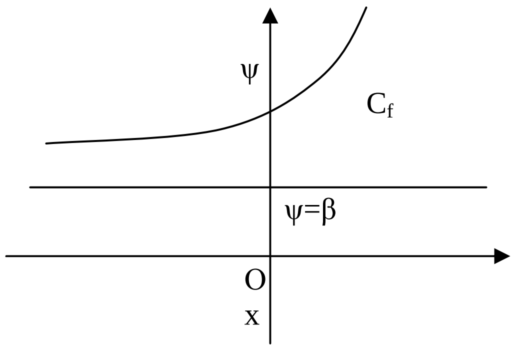


Οριζόντια ασύμπτωτη-Ορισμός

Η ευθεία ψ=β λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) όταν

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(x)=\beta$).

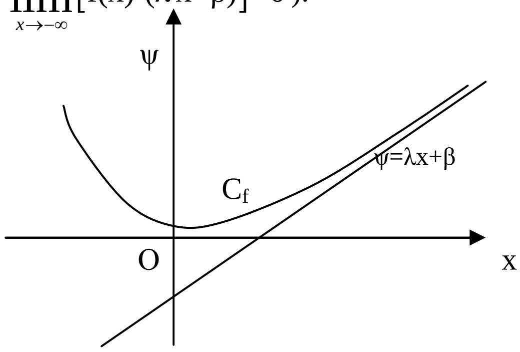




Πλάγια ασύμπτωτη-Ορισμός

Η ευθεία ψ=λx+β λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) αν: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$ (αντίστοιχα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$).



Για τον προσδιορισμό της ευθείας χ=λx+β που είναι ασύμπτωτη μιας συνάρτησης ακολουθούμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Η ευθεία ψ=λx+β είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν και μόνον αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\Re$.

Αντίστοιχα στο $-\infty$, αν και μόνον αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\Re$.

Επισημάνσεις για τις ασκήσεις

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφ. παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν ορίζεται.(για κατακόρυφες ασύμπτωτες)
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν είναι συνεχής.(για κατακόρυφες ασύμπτωτες)
- Στο $+\infty$, $-\infty$ εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ ή $(-\infty,\alpha)$ αντίστοιχα.(για οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες).
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα του x με βαθμό αριθμητή τουλάχιστον κατά δύο μονάδες μεγαλύτερο από το βαθμό του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
- Μια συνάρτηση δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη. Ειδικά αν λ=0 η ασύμπτωτη είναι οριζόντια, ενώ, αν $\lambda\neq 0$ η ασύμπτωτη είναι πλάγια.

Κανόνες de L' Hospital

Οι κανόνες αυτοί χρησιμοποιούνται για την εύρεση ορίων κυρίως κλασματικών συναρτήσεων στις οποίες η εφαρμογή του κανόνα του πηλίκου οδηγεί σε απροσδιόριστες μορφές του τύπου: $\frac{0}{0},\frac{+\infty}{+\infty},\frac{+\infty}{-\infty},\frac{-\infty}{+\infty},\frac{-\infty}{-\infty}$. Για την άρση της απροσδιοριστίας αυτών των μορφών ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1ο (Μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, $x_0\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα 2ο (Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in \Re \cup \{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$)

Επισημάνσεις για τις ασκήσεις

- **Τα θεωρήματα 1 και 2 ισχύουν και για πλευρικά όρια.**
- **Μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαδοχικά περισσότερες από μία φορές, αρκεί να ισχύουν οι προϋποθέσεις τους.**
- Κατά τον υπολογισμό ορίων εκτός από τις προηγούμενες μπορεί να προκύψουν και άλλα είδη απροσδιόριστων μορφών, όπως:

❑ **Μορφή** $0\cdot(\pm\infty)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]$ με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ *και* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ τότε μετασχηματίζω

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right) \text{ ή } f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

❑ **Μορφή** $(\pm\infty)-(\pm\infty)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ τότε

μετασχηματίζω $f(x)+g(x)=\dfrac{\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)$ ή βγάζω κοινό παράγοντα.

❑ **Μορφές** 0^0, $(+\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$

Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ είναι μία από τις παραπάνω απροσδιόριστες μορφές

τότε μετασχηματίζω $\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$ και υπολογίζω το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)\cdot \ln f(x)\right]$..

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μελέτη μιας συνάρτησης $f:A\to\Re$ ονομάζουμε την διαδικασία (πορεία) την οποία ακολουθούμε προκειμένου να συλλέξουμε τέτοιες πληροφορίες που να μας επιτρέψουν να χαράξουμε την γραφική της παράσταση σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρκετή ακρίβεια. Ακολουθούμε συνήθως τα εξής βήματα:

- Προσδιορίζουμε το π. ορισμού Α της f.
- Εξετάζουμε την συνέχεια της συνάρτησης στο π. ορισμού της.
- Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες, αν υπάρχουν.
- Βρίσκουμε τις παραγώγους f΄ και f΄΄ και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του πρόσημου της f ΄ βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f. Με τη βοήθεια του πρόσημου της f ΄΄ βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι **κυρτή** ή κοίλη και τα σημεία καμπής.
- Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σε έναν πίνακα που λέγεται **πίνακας μεταβολών της f** και με την βοήθειά του χαράσσουμε την γραφική παράσταση της f.
- Αν η συνάρτηση f είναι **άρτια** στο π. ορισμού της τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον ψ΄ψ, ενώ αν είναι **περιττή,** έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο. Έτσι, για τη μελέτη μίας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε σε εκείνα τα x, για τα οποία είναι $\chi \geq 0$.
- Αν η συνάρτηση f είναι **περιοδική** με περίοδο Τ, τότε περιορίζουμε την μελέτη της σε ένα διάστημα πλάτους Τ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εύρεση ορίων

1. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$i)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{e^x-ex} \qquad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\ln(x+1)} \qquad iii)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

$$iv)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^3+\pi} \qquad v)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-3x}}{1+x^3} \qquad vi)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-x-\ln(x+e)}{x^2}$$

$$vii)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x} \qquad viii)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\sigma\upsilon\nu x-1}{3x-\pi} \qquad ix)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$$

2. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$i)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^{5x})}{\ln(1+e^x)} \qquad ii)\ \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)$$

$$iv)\ \lim_{x\to +\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)^{x^2} \qquad v)\ \lim_{x\to +\infty}\left[x\cdot\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right] \qquad vi)\ \lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$$

3. Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x+e^x)$ $ii)\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln(1+e^x)\right]$ $iii)\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to0}(x^2\cdot\ln x)$ $v)\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ $vi)\lim\limits_{x\to0}\left[(e^{-x}-1)\cdot\ln x\right]$

4. Να υπολογιστούν τα όρια

$i)\lim\limits_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi x-x}{x-\eta\mu x}$ $ii)\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$ $iii)\lim\limits_{x\to0}(\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{x^2}}$

$iv)\lim\limits_{x\to0^+}x^{\eta\mu x}$ $v)\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\sigma\varphi x\right)$ $vi)\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

5. Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ $ii)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $iii)\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

iv) $\lim\limits_{x\to0}\left(xe^{-x}-\ln x+\frac{1}{x}\right)$ $v)\lim\limits_{x\to0}\left[\left(e^x-1\right)\cdot\ln x\right]$

****

6. Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-\alpha)e^x-(1-a)x-\beta}{x^2}, & x\neq0\\ 3, & x=0\end{cases}$$

7. Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β ώστε να είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}x\ln x+\alpha x-\beta & ,x>0\\ 1 & ,x=0\\ e^{\frac{1}{x}}\ln(-x)+\alpha & ,x<0\end{cases}.$$

8. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$ για τις οποίες είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση:

i) $f(x)=\begin{cases}x^2e^x-\beta, & \alpha\nu\ x\le1\\ \alpha\ln x, & \alpha\nu\ x>1\end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases}x\cdot2^{4-x^2}, & \alpha\nu\ x\le2\\ \alpha x^2-\beta x, & \alpha\nu\ x>2\end{cases}$

9. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$, ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο x_o η συνάρτηση:

i) $f(x)=\begin{cases}\alpha e^x-1 & ,\ x\le0\\ \eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x>0\end{cases}$ και $x_o=0$

ii) $f(x)=\begin{cases}\ln x+\alpha-1 & ,\ x>1\\ e^{x-1}+\beta x-\beta & ,\ x\le1\end{cases}$ και $x_o=1$.

****

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{xg(x)}{ημ^2x}, & αν\ 0<x<π \\ 0, & αν\ x \le 0 \end{cases}$ όπου g μία παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση με $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την f'.

11. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύουν:
$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0.$$
Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+1-συνx}{x^2+f(x)}$.

12. Έστω μια συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύουν:
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty$ *και* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'''(x)}{xf''(x)}=2006$.
Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)}$.

13. Έστω μια συνάρτηση f με f΄΄ συνεχή στο $\Re$ για την οποία ισχύουν:
$f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2006$.
α) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}$.
β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης: $g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$
γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g'(x)$ είναι συνεχής στο $x_o=0$.

****

Εύρεση ασύμπτωτων

14. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
i) $f(x)=\frac{lnx}{x^2}$ ii) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ iii) $f(x)=\frac{1+lnx}{x}+3$
iv) $f(x)=\frac{e^x}{x\sqrt{x-1}}$ v) $f(x)=x^x$, x>o vi) $f(x)=\frac{e^{x-1}}{ln^2x}$

15. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
i) $f(x)=\frac{x^2+3}{x-2}$ ii) $f(x)=\frac{x(3x^2-1)}{2x^2+1}$ iii) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$
iv) $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ v) $f(x)=\frac{x^3-5}{x+2}$ vi) $f(x)=2x-\sqrt{x^2+2x-3}$

16. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^2e^{-x}$ $\quad$ $ii)$ $f(x)=x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$ $\quad$ $iii)$ $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$.

****

Εύρεση παραμέτρων

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-\beta x+5}{x+2}$. Αν η ευθεία ψ=-2x+5 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρεθούν τα α και $\beta\in\Re$.

18. Να υπολογίσετε τα α, β $\in\Re$ ώστε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{(\alpha-2)x^2+\beta x+2}{x-3}-(2x+3)\right]=0$.

19. Να υπολογίσετε τα α, β $\in\Re$ ώστε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+4x+3}-(\alpha x+\beta)\right]=2$.

20. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει ασύμπτωτη την ευθεία ψ=5x+9 καθώς το $x\to+\infty$.. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\cdot f(x)-5x^2}{2\cdot f(x)+1}$.

21. Έστω ότι η ευθεία ψ=2x+5 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$

β) Να βρείτε τον $\mu\in\Re$ αν: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$.

22. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^2+(\lambda+1)x-2}{x-1}$ να έχει ασύμπτωτη την ευθεία ψ=2x-5 καθώς το $x\to+\infty$.

****

Σύνθετες ασκήσεις

23. Έστω οι συναρτήσεις f, g: $(0,+\infty)\to\Re$ με g(x)=f(x)+x+ln(x+1)-lnx, x>0. Αν η ευθεία ψ=x+3 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

24. Έστω η συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ και η $g(x)=xf(e^{-x})$. Αν η ευθεία ψ=2x+1 εφάπτεται της C_f στο $x_o=0$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

25. Έστω η συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(f(x)-2x\right)\left(1+e^x\right)}{x}=3$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

26. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+9}{x-1}$, $x\neq 1$. Αν η γραφική της παράσταση έχει στο $-\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία ψ=2x-7:
α) να βρεθούν οι α, $\beta\in\Re$.
β) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f.

27. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει:
$xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την f(0).

28. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει:
(1-συνx)f(x)=ln(1+x)-x για κάθε x>-1. Να βρείτε την f(0).

****

Μελέτη-γραφική παράσταση συνάρτησης

29. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f με τύπο:
$f(x)=x^4-6x^2+5$.

30. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}$.

31. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

32. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f με τύπο:
$f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

33. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x^2}$.

34. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

35. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$.

****
****
****
***
*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κυρτότητα- σημεία καμπής.

1. i) κοίλη στο $\mathbb{R}$. ii)κοίλη στα $(-\infty,-1]$, $[0,1]$ και κυρτή στα $[-1,0]$, $[1,+\infty)$.
   iii) κοίλη στο $(-\infty,0)$, κυρτή στο $(0,+\infty)$. iv) κοίλη στο $(-\infty,0]$, κυρτή στο $[0,+\infty)$.
2. i) κοίλη στο $(-\infty,1]$, κυρτή στο $[1,+\infty)$. Σημείο καμπής το Α(1,11).
   ii) κυρτή στα $(-\infty,-1]$, $(0,+\infty)$, κοίλη στο $[-1,0)$. Σημείο καμπής το Α(-1,1).
   iii)κυρτή στα $(-\infty,0)$, $[1,+\infty)$, κοίλη στο $(0,1]$. Σημείο καμπής το Α(1,0).
   iv)κυρτή στο $(-\infty,2]$, κοίλη στο $[2,+\infty)$. Σημείο καμπής για x=2.
   v) κυρτή στο (0,π/2], κοίλη στο [π/2,π).Σημείο καμπής το Α(π/2,0).
   vi) κοίλη στο $\mathbb{R}$.
3. α) α=3, β=24, γ=30. β) Τοπ. μέγιστο για x=4.
4. α) α=1, β=2.
5. α) α=6 ή α=-6. β) Αν α=6 είναι β=8, αν α=-6 είναι β=-8.
6. $x_1=-1$, $x_2=-3$ και $x_3=-2$.
7. $f''(x)=\frac{1}{x^2}\left[g'\left(\ln\frac{1}{x}\right)+g''\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]$. Είναι f ΄΄(x)>0 από την υπόθεση.
8. α=β=3. Η f ΄(x)=0 έχει Δ<0 συνεπώς δεν έχει ακρότατα.
9. Σωστό το Δ.
10. α) Αντικατάσταση της f ΄ και χωρισμός κλασμάτων.
    β) $g''(x)=-\frac{3}{(x-a)^2}-\frac{5}{(x-\beta)^2}<0$.
11. i) Από τη σχέση α) προκύπτει ότι g΄΄(x)>0 άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
    ii) Μονοτονία της g ΄ και g(0)=0.
12. Επειδή η f είναι κυρτή στο Δ, η f ΄ είναι γν. αύξουσα στο Δ. Αν $x_1<x_2$, εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα $\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]$, $\left[\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$ και με τη βοήθεια της μονοτονίας της f ΄ καταλήγουμε στο ζητούμενο.
13. Έχει ένα μόνο σ. καμπής, το Α(συν2α, ημ^{2}2α) , το οποίο ανήκει στην παραβολή $\psi=1-x^2$.
14. α) Είναι f ΄΄(x)>0. β) Είναι f ΄(0)=0. γ) Επειδή η f είναι κυρτή, η f ΄ είναι γν. αύξουσα από όπου προκύπτει ότι η έχει ελάχιστο το f(0)=2006.
15. Α) i) Επειδή η είναι κυρτή στο [α,β], η f ΄ είναι ↗ στο [α,β]. Αλλά $g'(x)=f'(x)-f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)$. Άρα για
    $\frac{\alpha+x}{2}<x\Rightarrow f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)<f'(x)\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow \sigma\tau o[\alpha,\beta]$.
    ii) Για β>α $\Longrightarrow$ g(β)>g(α) $\Longrightarrow$ ….. Β) Εφαρμογή του Αii) στη συνάρτηση f(x)=xlnx, x>0.
16. Αν $f^{(3)}(x)>0$ *τότε* $f''(x)\nearrow$ *στο* Δ *και επειδή* $f''(x_0)=0$ είναι f ΄΄(x)<0 για $x<x_0$ και f ΄΄(x)>0 για $x>x_0$. Άρα η f έχει για $x=x_0$ σημείο καμπής. (Όμοια εξετάζεται η περίπτωση όπου $f^{(3)}(x)<0$).
17. α) Θ.Μ.Τ. στα [α,β],[β,γ] και μονοτονία της f ΄. β) Εφαρμογή του α) στη συνάρτηση f(x)=lnx.
18. $a\in\mathbb{R}$.
19. Αποδείξτε ότι f ΄΄(x)>0 για κάθε x $\in\mathbb{R}$.
20. α $\in$ [-6,6].
21. Από Θ.Μ.Τ. για την f στο [x, β]προκύπτει ότι $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$.
    Αλλά f ΄ ↘ *στο* $[\alpha,\beta]$, έτσι: α<ξ $\Longrightarrow$ f ΄(α)>f ΄(ξ) $\Longrightarrow$ ……….

Κανόνες De L’ Hosrital- Ασύμπτωτες.

1. i) $-\infty$. ii) 0, iii) $+\infty$, iv) $+\infty$, v) 0, vi) $-\infty$, vii) 0, viii) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, ix) $\frac{1}{6}$.
2. i) $+\infty$, ii) e, iii) –2/5, iv) 1, v) –4, vi) e^2.
3. i) $+\infty$, ii) 0, iii) $\frac{1}{2}$, iv) 0, v) 1, vi) 0
4. i) 2, ii) 1, iii) –1/2, iv) 1, v) 0, vi) $\frac{1}{2}$.

5. i) 1, ii) e, iii) 1, iv) $+\infty$, v) 0.
6. α=-4, β=4.
7. α=1, β=1.
8. i) α=3e, β=e, ii) α=-4ln2, β=-8ln2-1.
9. i) α=1, β=0. ii) α=1 και $\beta \in \Re$.
10. Χρήση ορισμού της παραγώγου για την g στο 0 και κανόνες Hospital.
11. 0, 0, 1/2 .
12. 0.
13. α) 0 και 2006. β) g΄(0)=1003 (με χρήση του ορισμού) και

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{x f'(x) - f(x)}{x^2}, & \alpha\nu \ x \neq 0 \\ 1003, & \alpha\nu \ x = 0 \end{cases}.$$

γ) Είναι συνεχής στο 0.

14. i) x=0, ψ=0 (στο $+\infty$), ii) x=0, ψ=0 (στο $-\infty$), iii) x=0, ψ=3 (στο $+\infty$), iv) x=1, v) όχι, vi) όχι.
15. i) x=2, ψ=x. ii) ψ=$\frac{3}{2}$x. iii) ψ=x+$\frac{1}{2}$ $(\sigma\tau o \ +\infty)$, ψ=-x-$\frac{1}{2}$ $(\sigma\tau o \ -\infty)$.

    iv) ψ=x+$\frac{3}{2}$ (στο $+\infty$), ψ=-x-$\frac{3}{2}$ (στο $-\infty$). v) x=-2. vi) ψ=x-1 (στο $+\infty$), ψ=3x+1 (στο $-\infty$).
16. i) ψ=0 (χ΄χ) (στο $+\infty$), δεν έχει στο $-\infty$. ii) ψ=x στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
    iii) ψ=0 (χ΄χ) (στο $+\infty$), x=0 (ψ΄ψ) (στο $-\infty$).
17. α=-2, β=1.
18. α=4, β=-3.
19. α=$\sqrt{2}$, β=2+$\sqrt{2}$.
20. 7/5.
21. α) 2 και 5, β) μ=2.
22. λ=-8.
23. ψ=2x+3.
24. ψ=x.
25. ψ=2x.
26. α) α=2, β=-9.
27. f(0)=1.

f(0)=-1.

..*.*.*.*.*.*.*.*