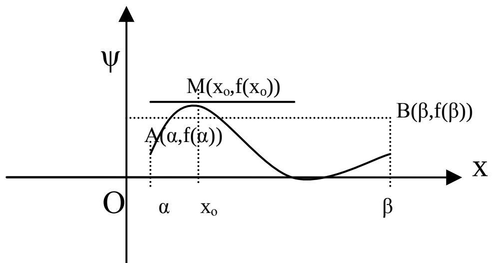
ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **Συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]**
- **Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και**
- **f(α)=f(β)**

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_o \in$ (α, β) τέτοιο, ώστε: $f'(x_0)=0$.



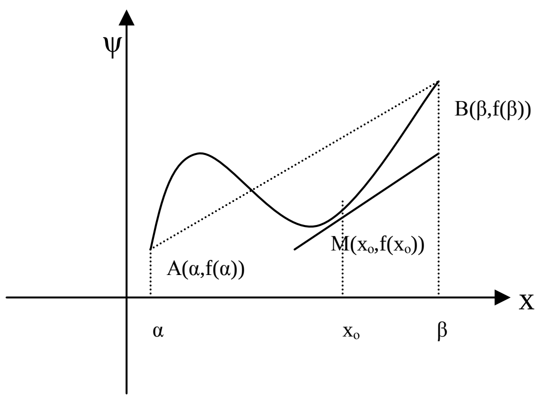
Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει , ένα τουλάχιστον, x_o στο (α, β) τέτοιο, ώστε η C_f να δέχεται στο σημείο $M(x_o, f(x_o))$ εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (Διαφορικού λογισμού)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **Συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και**
- **Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)**

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_o \in$ (α, β) τέτοιο, ώστε: $f'(x_0)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.



Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει , ένα τουλάχιστον, x_o στο (α, β) τέτοιο, ώστε η C_f να δέχεται στο σημείο $M(x_o, f(x_o))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία ΑΒ.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ Θ.Μ.Τ.

Θεώρημα 1

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **Η f είναι συνεχής στο Δ και**
- $f'(x)=0$ **για κάθε *εσωτερικό* σημείο του Δ,**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1=x_2$, προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής γιατί είναι συνεχής στο κλειστό και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα.. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε:
  $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό του Δ και ισχύει $f'(\xi)=0$, λόγω της (1) θα είναι $f(x_1)-f(x_2)=0$ άρα $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_1>x_2$ ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Δηλαδή η f είναι σταθερή στο Δ.

……………………………….

Πόρισμα

Έστω δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- **οι f και g είναι συνεχείς στο Δ και**
- $f'(x)=g'(x)$ **για κάθε *εσωτερικό* σημείο του Δ,**

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω η συνάρτηση h=f-g. Η h είναι συνεχής στο Δ και ισχύει: $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ από την υπόθεση. Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η h είναι σταθερή, δηλαδή, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε: $h(x)=c$ ή $f(x)-g(x)=c$, οπότε: $f(x)=g(x)+c$.

…………………………………

Θεώρημα 2 (κριτήριο μονοτονίας συνάρτησης)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν** $f'(x)>0$ **σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
- **Αν** $f'(x)<0$ **σε κάθε *εσωτερικό* σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Παίρνουμε την περίπτωση όπου $f'(x)>0$.
Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$.
Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Επειδή $f'(x)>0$ στο Δ θα είναι και $f'(\xi)>0$ στο (x_1, x_2) οπότε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0 \Leftrightarrow f(x_2)>f(x_1) \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$
δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
Η περίπτωση όπου $f'(x)<0$ αποδεικνύεται όμοια.

……………………………………..

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός τοπικού ακρότατου

- Μια συνάρτηση f με π. ορισμού το Α παρουσιάζει στο x_o του Α **τοπικό μέγιστο,** όταν υπάρχει δ>0, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Το x_o λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου,** ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f.**
- Μια συνάρτηση f με π. ορισμού το Α παρουσιάζει στο x_o του Α **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει δ>0, τέτοιο ώστε $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Το x_o λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου,** ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f.**

.**Θεώρημα Fermat**

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα *εσωτερικό* σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει *τοπικό ακρότατο στο x_o* και είναι *παραγωγίσιμη* στο σημείο αυτό τότε: $f'(x_o)=0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο. Τότε, επειδή το x_o είναι εσωτερικό σημείο του Δ, υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right) \subseteq \Delta$ *και* $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in \left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$. (1)
Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$ Επομένως:

- Αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε λόγω της (1), θα είναι: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε: $f'(x_o)= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$ (2).

- Αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε λόγω της (1), θα είναι: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε:

$f\,'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ (3).

Από τις (2) και (3) έχουμε τελικά: $0 \leq f\,'(x_o) \leq 0$ ή $f\,'(x_o)=0$.
Ανάλογη είναι η απόδειξη αν η f έχει τοπικό ελάχιστο.

…………………………….

Θεώρημα εύρεσης τοπικών ακρότατων

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_o, στο οποίο η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), τότε το x_o είναι **τοπικό μέγιστο** της f.
- Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_o) και $f'(x)>0$ στο (x_o,β), τότε τοx_o είναι **τοπικό ελάχιστο** της f.
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, τότε το $f(x_o)$ **δεν** είναι τοπικό ακρότατο της και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

<u>ΣΧΟΛΙΑ</u>

α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f ’ είναι διαφορετική από το 0, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων.

Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ είναι:

- **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της g μηδενίζεται.**
- **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**
- **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο π. ορισμού της).

β) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με 0, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ</u>

Στο θ. ROLLE

- Το θ. Rolle ισχύει μόνον όταν υπάρχουν και οι τρεις προϋποθέσεις.

- Η συνάρτηση πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα και **όχι** σε ένωση διαστημάτων.

- Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f(x) υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f'(x)$. Γιατί αν $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ τότε, από το θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

- Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f ΄ υπάρχει «το πολύ» μια ρίζα της f.

- Αν η f έχει δύο ρίζες, τότε, η f ΄ έχει τουλάχιστον μια.

- Αν η f έχει τρεις ρίζες, τότε, η f ΄έχει δύο τουλάχιστον και η f ΄΄ μία τουλάχιστον κ.ο.κ.

- Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει το πολύ μία ρίζα.

Στο Θ.Μ.Τ.

- Το Θ.Μ.Τ ισχύει μόνον όταν υπάρχουν και οι δύο προϋποθέσεις.

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] , τότε ισχύει το θεώρημα γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και είναι συνεχής σε αυτό.

- Το Θ.Μ.Τ μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: $f(\beta)-f(\alpha)=f'(x_o)(\beta-\alpha)$.

- Αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε από το Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι $f'(x_o)=0$, οπότε, το Θ. Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.

- Αν εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την f ΄τότε, παίρνουμε αντίστοιχα συμπεράσματα για την f ΄΄.

Στο θεώρημα 1 και στο πόρισμα

- Δεν ισχύουν στην περίπτωση που η συνάρτηση ορίζεται σε ένωση διαστημάτων.

- Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις με την ίδια παράγωγο που όλες διαφέρουν κατά μία σταθερά c, ενώ, στα σημεία με την ίδια τετμημένη x_o, οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων, είναι παράλληλες.

Στο θεώρημα 2

- Η πρόταση ισχύει για διαστήματα της μορφής [α, β], (α, β], [α,β) και (α, β).

- Αν μία συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ στο οποίο ισχύει $f'(x) \geq 0$ αλλά η εξίσωση $f'(x)=0$ επαληθεύεται για πεπερασμένο πλήθος σημείων του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Αντίστοιχα για $f'(x) \leq 0$.

- Αν μία συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα $\Delta=[\alpha, x_o] \cup [x_o,\beta]$, είναι συνεχής στο x_o και $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ακόμα και αν δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο x_o.

ΜΕΘΟΔΟΙ-ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

- Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f έχει **μία, τουλάχιστον ρίζα** στο (α, β) και **δεν** εφαρμόζεται το θ. Bolzano, τότε θεωρούμε την συνάρτηση F(x) τέτοια ώστε $F'(x)=f(x)$ και εφαρμόζουμε το θ. Rolle για την F(x).

- Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση η μία εξίσωση έχει **μία ακριβώς** ρίζα στο (α, β) τότε:
  α) Δείχνουμε ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα με Bolzano η την πρόταση σύμφωνα με την οποία « ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\Re$».
  β) Δεχόμαστε ότι έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 ώστε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ και εφαρμόζουμε το θ. Rolle στο (α, β) ή δείχνουμε ότι είναι γνησίως μονότονη στο (α, β). Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση η μία εξίσωση έχει **δύο η τρεις ακριβώς ρίζες** στο (α, β) τότε χωρίζουμε το διάστημα σε κατάλληλα υποδιαστήματα στα οποία εφαρμόζουμε την προηγούμενη διαδικασία.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση A(x)=B(x) έχει **το πολύ μία ρίζα** στο (α,β) τότε, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$, $x\in[\alpha, \beta]$ και υποθέτουμε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 με $\alpha<\rho_1<\rho_2<\beta$. Κατόπιν εφαρμόζουμε το θ. Rolle στο $(\rho_1,\rho_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ και παίρνουμε ρίζα ξ της $f'(x)=0$ η οποία ή δεν ανήκει στο (α,β) ή η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής **$f'(\xi)=c$,** τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $g(x)=f(x)-cx$, στην οποία μπορεί να εφαρμόζεται το θ. Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής **$f'(\xi)+cf(\xi)=0$,** τότε για x=ξ έχουμε την **$f'(x)+\kappa f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)+(\kappa x)'f(x)=0$** και πολλαπλασιάζοντας με **$e^{\kappa x}$** γίνεται: **$e^{\kappa x}f'(x)+(\kappa x)'e^{\kappa x} f(x)=0 \Leftrightarrow (e^{\kappa x}f(x))'=0$.** Κατόπιν θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $g(x)=e^{\kappa x}.f(x)$ και εφαρμόζουμε σ' αυτήν το θ. Rolle.

- Παρόμοια, αν έχουμε μια σχέση της μορφής **$f'(\xi)-cf(\xi)=0$,** θα πολλαπλασιάσουμε την **$f'(x)-cf(x)=0$** με **$e^{-\kappa x}$** και θα εφαρμόσουμε το θ. Rolle στην $g(x)=e^{-\kappa x}f(x)$.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής **$f'(\xi)(\xi-c)=f(\xi)$,** τότε για ξ=x γίνεται: $f'(x)(x-c)-(x-c)'f(x)=\dfrac{f'(x)(x-c)-(x-c)'\cdot f(x)}{(x-c)^2}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x-c}\right)'=0$. Κατόπιν εφαρμόζουμε το θ. Rolle στη βοηθητική συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$ για $x\neq c$.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής **$\xi.f'(\xi)=\nu f(\xi)$,** τότε για x=ξ γίνεται: $xf'(x)-\nu f(x)=0$ και πολλαπλασιάζοντας με $x^{\nu-1}$ παίρνουμε:

$x^{\nu}f\,'(x)-\nu x^{\nu-1}f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^{\nu}f'(x)-\nu x^{\nu-1}f(x)}{\left(x^{\nu}\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}\right)'=0$ οπότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}$ και εφαρμόζουμε το θ. Rolle στην g.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής **$f'(\xi)(c-\xi)=f(\xi)$,** τότε για $x=\xi$ γίνεται: $f\,'(x)(c-x)+(c-x)'f(x)=0 \Leftrightarrow (f(x)(c-x))'=0$ και θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $g(x)=(c-x)f(x)$ οπότε, εφαρμόζουμε το θ. Rolle στην g.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής **$f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}$,** τότε, για $x=\xi$ γίνεται: $f\,'(x)-\nu x^{\nu-1}=0 \Leftrightarrow (f(x)-x^{\nu})'=0$ και θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^{\nu}$ οπότε εφαρμόζουμε το θ. Rolle στην g.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής **$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+\ldots+f'(\xi_\kappa)=0$** τότε χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε κ υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από αυτά.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής **$f''(\xi)=0$** τότε εφαρμόζω θ. Rolle στην $f'(x)=0$ σε κάποιο διάστημα (ρ_1, ρ_2) για το οποίο ισχύει $f\,'(\rho_1)=f\,'(\rho_2)=0$ σε συνδυασμό με το Θ.Μ.Τ. στην αρχική συνάρτηση f.

Για την απόδειξη ανισοτήτων μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

- Αν η ανισότητα έχει **δύο** μεταβλητές τότε φανερά εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στη συνάρτηση f αφού πρώτα φέρουμε την ανισότητα στη μορφή:
  $\kappa<\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\lambda$ όπου f κατάλληλη συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [α, β].
  Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο [α, β] για την f και παίρνουμε
  $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ με $\alpha<\xi<\beta$. Από το δεδομένο $\alpha<\xi<\beta$ καταλήγω στην ανισότητα $\kappa<f'(\xi)<\lambda$ και από εκεί στο ζητούμενο.

- Αν η ανισότητα δεν είναι διπλή τότε της δίνουμε τη μορφή και δουλεύουμε ανάλογα. $\kappa<\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ή $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\lambda$

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f΄ στο [α, β], δηλ. $m \le f\,'(x) \le M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε από το Θ.Μ.Τ. έχουμε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ με $\alpha<\xi<\beta$. Έτσι $m \le \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \le M \Leftrightarrow$
  $m(\beta-\alpha) \le f(\beta)-f(\alpha) \le M(\beta-\alpha)$.

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και η παράγωγός της ικανοποιεί μία σχέση της μορφής $|f'(x)| \le \kappa$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε, από το Θ.Μ.Τ.

υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Επομένως παίρνουμε τελικά ότι: $\left|\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \le \kappa \Leftrightarrow \left|f(\beta)-f(\alpha)\right| \le \kappa(\beta-\alpha)$.

- Αν η ανισότητα έχει **μία** μεταβλητή τότε προτιμούμε να την αποδείξουμε μέσω μονοτονίας και ακρότατων φέρνοντας το δεύτερο μέλος στο πρώτο και θεωρώντας κατάλληλη συνάρτηση. Τέτοιες ανισότητες θα έχουν τη μορφή $A(x) \ge B(x)$ ή $A(x) \le B(x)$ ή $A(x)<B(x)$ ή $A(x)>B(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
  Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις ως προς τη βοηθητική συνάρτηση:
  α) Η προς απόδειξη σχέση γίνεται: $A(x) \ge B(x) \Leftrightarrow A(x)-B(x) \ge 0,\ x \in \Delta$.
  Θεωρούμε $\varphi(x)=A(x)-B(x),\ x\in\Delta$ και αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi(x)\ge 0$.
  β) Αν η $A(x)$ ή η $B(x)$ διατηρούν σταθερό πρόσημο στο Δ π.χ. $B(x)>0$ (για παράδειγμα να είναι εκθετική συνάρτηση), τότε η προς απόδειξη σχέση γίνεται: $A(x) \ge B(x) \Leftrightarrow \dfrac{A(x)}{B(x)} \ge 1,\ x \in \Delta$. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)},\ x \in \Delta$ και αρκεί να δείξουμε ότι: $\varphi(x)\ge 1$.
  γ) Αν $A(x)>0$ και $B(x)>0$ στο Δ (π.χ. εκθετικές συναρτήσεις) τότε, η ζητούμενη σχέση γίνεται $A(x) \ge B(x) \Leftrightarrow \ln A(x) \ge \ln B(x)$, $x \in \Delta$ και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως στις περιπτώσεις α και β.

- Όπως είπαμε η μέθοδος αυτή ακολουθείται όταν η προς απόδειξη ανισότητα έχει μια μεταβλητή, γιατί, αν έχουμε **δύο μεταβλητές** χρησιμοποιούμε κυρίως το Θ.Μ.Τ., αν και πάλι μπορούμε να ακολουθήσουμε αυτή τη μέθοδο (δηλαδή μονοτονία και ακρότατα). Σκεπτόμαστε ως εξής:
  Αν η προς απόδειξη σχέση είναι της μορφής $A(\alpha,\beta)\ge B(\alpha,\beta)$, α,β στο Δ τότε αρκεί να δείξουμε ότι: $A(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)\ge 0$, για κάθε α,β στο Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=A(\alpha,x)=B(\alpha,x)$ για κάθε $x \in \Delta$ και δείχνουμε ότι $\varphi(x) \ge 0$ για κάθε α, x στο Δ.(κάνοντας πίνακα μεταβολών κ.λ.π.) Έτσι παίρνουμε $\varphi(x) \ge 0$ άρα και για $x=\beta$ έχουμε
  $\varphi(\beta) \ge 0 \Leftrightarrow A(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta) \ge 0 \Leftrightarrow A(\alpha,\beta) \ge B(\alpha,\beta),\ \alpha,\beta \in \Delta$.

Για την επίλυση εξισώσεων μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

- Λύνουμε την εξίσωση με κλασικές μεθόδους από την άλγεβρα.

- Βρίσκουμε μία προφανή ρίζα της $f(x)=0$ και έπειτα αποδεικνύουμε ότι η ρίζα είναι μοναδική με τις μεθόδους που είδαμε στο θ. Rolle ή με τη βοήθεια της μονοτονίας.

- Προσπαθούμε να φέρουμε την εξίσωση στη μορφή $g(\kappa(x))=g(\lambda(x))$, όπου g μία νέα συνάρτηση. Αποδεικνύουμε ότι η g είναι 1-1 ή με τον ορισμό ή αποδεικνύοντας ότι είναι γνησίως μονότονη στο π. ορισμού της και στη συνέχεια λόγω του ορισμού των 1-1 συναρτήσεων έχουμε: $g(\kappa(x))=g(\lambda(x)) \Leftrightarrow \kappa(x)=\lambda(x)$ την οποία λύνουμε συνήθως με κλασικές μεθόδους.

- Βρίσκουμε το πεδίο τιμών f(A) της συνάρτησης f και σε περίπτωση που το 0 δεν ανήκει σε αυτό η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν στην άσκηση δίνεται ανισοτική σχέση και ζητείται ισότητα (εφαρμογή του θεωρήματος FERMAT)

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

α) Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισοτικής σχέσης στο πρώτο μέλος

β) Θέτουμε το πρώτο μέλος με μια βοηθητική συνάρτηση h(x) και έχουμε έτσι μια σχέση της μορφής $h(x)\geq 0$ ή $h(x)\leq 0$.

γ) Βρίσκουμε ένα σημείο x_o για το οποίο ισχύει $h(x_o)=0$.

δ) Η $h(x)\geq 0$ γίνεται $h(x) \geq h(x_0)$ (ή η $h(x) \leq 0$ γίνεται $h(x) \leq h(x_0)$).

ε) Εφαρμόζουμε το θ. FERMAT, γιατί ισχύουν οι προϋποθέσεις του και παίρνουμε $h'(x_0)=0$ από όπου προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

Πως θα δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ.

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

α) Δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής στο Δ.

β) Δείχνουμε ότι $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 1, η f θα είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Η απόδειξη της σχέσης $f'(x)=0$ μπορεί να γίνει ή με το τυπολόγιο των παραγώγων ή με τον ορισμό της παραγώγου σε τυχαίο σημείο x_o του π. ορισμού της αν δεν δίνεται ο τύπος της f αλλά κάποιες σχέσεις που ικανοποιεί.

..*.*.*.*.*.*.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Θεώρημα ROLLE

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3-4x^2+5x+1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+32x+1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$, τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο [-1,2] και παραγωγίσιμη στο (-1,2) με $f(-1)=-1$ και $f(2)=-4$. Να δείξετε ότι:
   i) Για τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x^2$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα [-1,2].
   ii) Υπάρχει $\xi\in(-1,2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=-2\xi$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1, & x\geq 0 \\ 3x^2+x+1, & x<0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν ισχύει το θ. Rolle στο [-1,1] και αν ναι να βρείτε το ξ του διαστήματος (-1,1).

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+e^{x^2-1})$. Να εξετάσετε αν ισχύει το θ. Rolle στο [-1,1] και αν ναι να βρείτε το ξ του διαστήματος (-1,1).

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\mu x+\nu, & x\in[-1,0] \\ \rho x^2+4x+4, & x\in(0,1] \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των μ, ν, ρ ώστε να εφαρμόζεται το θ. Rolle για την f στο διάστημα [-1,1].

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

8. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x+x^2\eta\mu\dfrac{\pi}{2x}, & \alpha\nu\ x\in[-1,0) \\ \beta x+\gamma, & \alpha\nu\ x\in[0,1] \end{cases}$. Να βρείτε τους α, β, γ στο $\Re$ ώστε να ισχύει το θ. Rolle για την f στο διάστημα [-1, 1].

   β) Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$ και η συνάρτηση

   $$f(x)=\frac{\alpha x^3}{3}+\left(\frac{\beta}{2}+\delta\right)x^2+\left(\gamma-\delta\right)x+\delta.$$ Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$

τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

9. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις η f ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ. στο αντίστοιχο διάστημα . Στις περιπτώσεις που ισχύει να βρείτε τα ξ του αντίστοιχου διαστήματος:

i) $f(x)=x^3-3x,\ x\in[-\sqrt{3},0]$ ii) $f(x)=\frac{10}{x},\ x\in[2,5]$

iii) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\geq 1 \\ x^3-x, & x<1 \end{cases}$ στο $[0,1]$ iv) $f(x)=\sqrt{x-1},\ x\in[2,5]$

$f(x)=\begin{cases} \frac{3-x^2}{2}+1, & x<1 \\ \frac{1}{x}+1, & x\geq 1 \end{cases}$ στο $[0,2]$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\text{συνx}+\ln\left(\text{εφ}\frac{x}{2}\right)-\text{συνx}\times\ln(\text{ημx}),\ x\in(0,\pi)$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\text{συνx}+\ln\left(\text{εφ}\frac{x}{2}\right)=\ln(\text{ημx})^{\text{συνx}},\ x\in(0,\pi)$.

10. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [4, 10] με f(4)=6 και f(10)=0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi\in(4, 10)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(ξ, f(ξ)) να σχηματίζει γωνία $\omega=135^o$ με τον άξονα χ΄χ.

11. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1, 5] με f(1)=-2 και $|f'(x)|<2$ για κάθε $x\in(1,5)$, να αποδείξετε ότι: -10< f(5) <6.

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0, 4] με f(0)=1 και $3\leq f'(x)\leq 6$ για κάθε $x\in(0,4)$, να δείξετε ότι $13\leq f(4)\leq 25$.

13. Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

14. Δίνεται συνάρτηση f: [α, β] παραγωγίσιμη σε αυτό το διάστημα με f(α)=f(β). Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

15. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, 5]. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο (0, 5) και $|f''(x)|\leq 1$ για κάθε $x\in(0,5)$, να δείξετε ότι $|f'(0)+f'(5)|\leq 5$.

16. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] και ισχύει f(0)=1 και f(1)=5, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=12$.

17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1, 5] και παραγωγίσιμη στο (1, 5) και η

$f\,'$είναι γνησίως φθίνουσα στο (1, 5) να δείξετε ότι: $f(1)+f(5)<f(2)+f(4)$.

18. Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [0, 3], να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,3)$ με $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=f(3)-f(0)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύει: $f(2x)=2f(x)$, $x\in\Re$.

i) Δείξτε ότι: $\dfrac{f(2)+f(0)}{2}=f(1)$.

ii) Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε: $f\,''(\xi)=0$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύει: $f(\kappa x)=\kappa f(x)$, $x\in\Re$ και $\kappa\in\Re-\{1\}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της $f\,'$ να δέχεται οριζόντια εφαπτόμενη.

21. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και περιττή.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x(\eta\mu x-1)g(x)+\kappa$, $x, \kappa\in\Re$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_o)=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$ και η $g(x)=\dfrac{e^{f(x)}}{f(x)}$. Αν για την f(x) ισχύει το θεώρημα Rolle στο [α, β] και η C_f διέρχεται από το σημείο Μ(α, 1) να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'''(\xi)=0$.

23. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2, 3] και παραγωγίσιμη στο (2, 3).Αν f(2)=2 και f(3)=5, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(2, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o)=3$.

24. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-α, α], α>0 και ισχύει $f\,'(x)\le\dfrac{1}{\alpha}$ για κάθε $x\in(-\alpha,\alpha)$, να αποδείξετε ότι: $f(-\alpha)\ge f(\alpha)-2$.

25. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-α, α], α>0 και ισχύει $|f\,'(x)|\le\dfrac{1}{\alpha}$ για κάθε $x\in(-\alpha,\alpha)$ να αποδείξετε ότι: $f(-\alpha)-2\le f(\alpha)\le f(-\alpha)+2$.

26. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [0, 2] για την οποία ισχύει ότι: $|f\,'(x)| \geq 3,\ x \in (0,2)$.
Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A(0, f(0)) και B(2, f(2)), έχει συντελεστή διεύθυνσης που παίρνει τιμές στο διάστημα $\Delta = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

27. α) Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{x}{4+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{4}$ για κάθε $x \in \Re$.

β) Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f\,'(x) = \dfrac{x}{4+x^2}$, να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \Re$ ισχύει $|f(\beta)-f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{4}\cdot|\beta-\alpha|$..

****

Απόδειξη ανισοτήτων

28. Να αποδείξετε ότι:
α) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [α,β]
β) Ισχύει: $|\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta| \leq |\alpha-\beta|$.

29. Να αποδείξετε ότι:
α) Η συνάρτηση f(x)=εφx ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [α, β] όπου $0<\alpha<\beta<\pi/2$
β) Ισχύει: $\dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} < \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta < \dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$.

30. Να αποδείξετε ότι:
α) Η συνάρτηση f(x)=lnx ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [x, x+1] για κάθε x>0.
β) Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.
γ) Ισχύει: $\dfrac{1}{x+1} < \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) < \dfrac{1}{x},\quad x>0$.

31. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] με f(α)>f(β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_o \in (\alpha,\beta)$, τέτοιος, ώστε $f\,'(x_o)<0$.

32. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύει ότι: f(2005)=0 και η $f\,'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$. Να αποδείξετε ότι
$f'(2006)<f(2006)<f'(2005)$.

33. Αν $|f\,'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \Re$ και f(1)=0, να αποδείξετε
$|f(x)| \leq |x-1|$, για κάθε $x \in \Re$.

34. Αν υπάρχει $M \in \Re$, ώστε $f\,'(x) \geq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $f(\beta) \geq f(\alpha) + M(\beta-\alpha)$.

35. Έστω δύο συναρτήσεις *f* και g, συνεχείς στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α,β) για τις οποίες ισχύουν:
    i) $g(x) \neq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ και $g'(x) \neq 0$ στο (α,β) και
    ii) f(β)g(α)-f(α)g(β)=0

    Να αποδείξετε ότι:

    α) Για τη συνάρτηση $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θ. Rolle στο [α, β]

    β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε: $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

36. Να αποδείξετε ότι:

    i) $\sigma\varphi\beta<\dfrac{\ln(\eta\mu\beta)-\ln(\eta\mu\alpha)}{\beta-\alpha}<\sigma\varphi\alpha$, αν $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

    ii) $\nu\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta) \leq \alpha^{\nu}-\beta^{\nu}\,\pounds\,\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)$, αν $0<\beta \leq \alpha$ και $\nu \in N^*$.

    iii) $xe^{x-1} \leq 1+(x-1)e$, αν $x \in (1,2)$.

    iv) $e^{\psi}<\dfrac{e^x-e^{\psi}}{x-\psi}<e^{\chi}$, αν $x>\psi$.

    v) $1+\dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}<\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$, αν $-1<x<0$.

    vi) $\dfrac{1}{x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)<\dfrac{1}{x-1}$, αν $x>1$.

****

37. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν γ είναι σημείο του (α, β) τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f''(\xi)=0$.

38. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και τα σημεία Α(α, f(α)), Β(β, f(β)) και Γ(γ, f(γ)) της γραφικής παράστασης της f είναι συνευθειακά, με α<β<γ, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0$.

39. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 7] και τα f(1), f(4), f(7) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

40. Έστω η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και η συνάρτηση $g(x)=f(1-x)-f(1+x)$, $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(1-\xi)=f''(1+\xi)$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει: $\dfrac{f'(\alpha)(\beta-\alpha)}{2}=f\left(\dfrac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to \Re$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι:
α) για τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}(x-\alpha)(x-\beta)$ εφαρμόζεται το θ. Rolle στο [α, β].
β) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi}$.

43. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσιμη στο (α, β), για την οποία ισχύει: $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι:
α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε : $f(x_0)=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$, κ, λ ομόσημοι .
β) Υπάρχουν ξ_1, ξ_2, $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε: $\frac{\lambda}{f'(\xi_1)}+\frac{\kappa}{f'(\xi_2)}=\frac{\kappa+\lambda}{f'(\xi)}$, με $\xi_1<\xi_2$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to \Re$, παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f'(x)\neq 0$ στο (α, β). Να αποδείξετε ότι:
α) Υπάρχει ένα ακριβώς $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $4f(x_o)=f(\alpha)+3f(\beta)$.
β) Υπάρχουν ξ_1, ξ_2, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε: $\frac{3}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{4}{f'(\xi)}$.

45. Αν f είναι συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] για την οποία ισχύει $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_o)=1$, να αποδείξετε ότι: $x_o[f(\beta)-f(\alpha)]>\beta-\alpha+\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)$.

46. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] με α<0<β και $f'(x)\leq 1$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Αν f(α)=α και f(β)=β, να αποδείξετε ότι: f(0)=0.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+x^2+\alpha x+\beta, & x<1 \\ \beta x^2+2x+\alpha, & x\geq 1\end{cases}$ με α, β $\in\Re$. Να βρεθούν τα α και β, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο Α(-1, 0) και στο διάστημα [0, 2] να εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. Κατόπιν να γίνει η εφαρμογή του θεωρήματος και να βρεθεί το ξ.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to \Re$, συνεχής στο [α, β] και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν f(α)=2β και f(β)=2α , να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ(ξ, f(ξ)) της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση x-2ψ+3=0.

49. Έστω α>0 και συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο [-α, α].
Αν 2g(0)=g(α)+g(-α), να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi)=0$.

50. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, 1] με f(0)=0 και f(1)=1, να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_1, x_2 στο (0, 1) τέτοια, ώστε: $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$.

51. Έστω δύο συναρτήσεις *f* και g, συνεχείς στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α,β) για τις οποίες ισχύουν:

i) $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ και ii) $g'(x)\neq 0$ στο (α,β).
Να αποδείξετε ότι:
α) $g(\beta)\neq 0$,
β) η συνάρτηση $F(x)=g(\beta)f(x)-f(\beta)g(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα [α, β],
γ) υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε: $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}$.

****

Πλήθος ριζών εξίσωσης

52. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (2, 3) για κάθε $\lambda\in\Re$.

53. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+2\alpha x^3+6\alpha^2x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$ και $\alpha\neq 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες .

54. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3+3(\alpha-1)x^2+2\beta x-\alpha=\beta$ με α, β στο $\Re$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

55. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-21x^2+\mu=-18x$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα (1, 2).

56. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^5-5x^3+5x+1=0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

57. Αν $2\alpha+5\beta+10\gamma=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^4+\beta x+10\gamma=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

58. Αν $\alpha<0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4-\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

59. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4+2x^3-7x^2-x+5$ και $g(x)=x^4-2x^3+2x^2+x-4$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα (1, 2).

60. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=(2x-1)(2x+1)(x^2-3x)$. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της $f'(x)$.

61. Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2-\frac{2}{3}\beta\cdot x=\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).
Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β], να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς:
α) Αν $f(\alpha)<f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_o)>0$
β) Αν $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$, τότε υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την διχοτόμο της δεύτερης και τέταρτης γωνίας των αξόνων.
γ) Αν η C_f έχει οριζόντια εφαπτόμενη, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

δ) Αν f(α)=f(β)=f(γ) για κάποιο $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

****

62. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει f(α)-f(β)=c(α-β). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $f'(\xi)=c$, όπου $c \in \Re$.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει αf(α)-βf(β)=c(f(α)-f(β)). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $(\xi-c)f'(\xi)=-f(\xi)$, όπου $c \in \Re$.

64. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει f(α)=f(β). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $(\xi-c)f'(\xi)=f(\xi)$, όπου $c \in \Re$.

65. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει $\alpha^\nu f(\alpha)-\beta^\nu f(\beta)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $\xi f'(\xi)=-\nu f(\xi)$.

66. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει $\beta^\nu f(\alpha)-\alpha^\nu f(\beta)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $\xi f'(\xi)=\nu f(\xi)$.

67. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει ημαf(α)=ημβf(β). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: ημξ.f ΄(ξ)=-συνξ.f(ξ).

68. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία ισχύει συναf(α)=συνβf(β). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: συνξ.f ΄(ξ)=ημξ.f(ξ).

69. Δίνονται οι συναρτήσεις *f, g* $:[\alpha, \beta] \to \Re$, συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β) και για τις οποίες ισχύει $e^{-h(\alpha)}f(\alpha)=e^{-h(\beta)}f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $f'(\xi)=h'(\xi) \cdot f(\xi)$.

****

70. Να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=2^x+5^x$, $x \in \Re$.

71. Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 7^x = 4^x + 6^x$, $x \in \Re$.

72. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(1+x)^{2006} = 1+x^{2006}$ έχει το 0 ως μοναδική ρίζα.

73. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^x+3^x+5^x=28x-18$ έχει ως μοναδικές ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

74. Να λυθεί η εξίσωση $5^x+7^x = 4^x+8^x$, $x \in \Re$.

****

Συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμής

75. Έστω δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:
i) $f(0)=0$ και $g(0)=1$
ii) $f'(x)-g(x)=0$ και $g'(x)+f(x)=0$ για κάθε $\chi \in \Re$.
Να αποδείξετε ότι: $\left(f(x)\right)^2+\left(g(x)\right)^2=1$, $x \in \Re$.

76. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f(0)=0$, $f'(0)=0$ και $f''(x)+f(x)=0$, $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι:
α) Η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2$ είναι σταθερή στο $\Re$.
β) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και f ΄.

77. Αν $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $\chi \in \Re$, $f(0)=\alpha$ και $f'(0)=\beta$, να αποδείξετε ότι:
$$\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2=\alpha^2+\beta^2.$$

78. Έστω μία συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύουν:
α) $f''(x)+f(x)=0$, $x \in \Re$ και β) $f'(0)=f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2+f(x)\eta\mu x+f'(x)\sigma\upsilon\nu x$ είναι σταθερή στο $\Re$ και να βρείτε τον τύπο της g.

79. Έστω δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:
i) $g''(x)=g(x)+e^x g'(x)$, $x \in \Re$ και
ii) $f''(x)=f(x)-e^x f'(x)$, $x \in \Re$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)g(x)-f'(x)g'(x)$ είναι σταθερή στο $\Re$.

80. Έστω μία συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=10$ και $f'(x)=1000f(x)$, $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)f(-x)$ είναι σταθερή στο $\Re$ και να βρείτε τον τύπο της.

81. Έστω δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν: $f(0)=g(0)$ και $f''(x)=g''(x)$, $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι:
α) Υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε να ισχύει: $f(x)-g(x)=cx$ για κάθε $x \in \Re$
β) Αν α, β ρίζες της g με $\alpha<0<\beta$, τότε η f έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

82. Έστω μία συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει:
$$\left|f(x)-f(\psi)\right| \le (x-\psi)^2,\text{ για κάθε } x \in \Re.$$
Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\Re$.

****

Σταθερή συνάρτηση- εύρεση τύπου

83. Έστω δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:
i) f(0)=g(0)=1, f(1)=3 και g(1)=2
ii) $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x\in\Re$.
Να αποδείξετε ότι f(x)=g(x)+x για κάθε $x\in\Re$.

84. Έστω μία συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη με $f(x)>0$, $f(0)=e$ και
$\ln\left(f(x)\right)^{f(x)} = f'(x)$ *για κάθε* $x\in\Re$.
i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\ln\left(f(x)\right)}{e^x}$ είναι σταθερή.
ii) Να βρείτε την συνάρτηση f.

85. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)-f'(x)=g(x)-g'(x)$ για κάθε $\chi\in\Re$ και f(2006)=g(2006). Να αποδείξετε ότι:
i) η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)-g(x)}{e^x}$ είναι σταθερή και ii) f =g.

86. Έστω $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\Re$, f(0)=α και $f'(0)=\beta$. Να αποδείξετε ότι:
i) για τη συνάρτηση g(x)=f(x)-ασυνx-βημx ισχύει $g''(x)=-g(x)$,
ii) η συνάρτηση $\varphi(x)=\left(g(x)\right)^2+\left(g'(x)\right)^2$ είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της
iii) f(x)=βημx+ασυνx για κάθε $x\in\Re$.

87. Έστω συνάρτηση $f\,\Re\to\Re$ με f(1)=4, f(2)=-8 και $f(x+\psi)=f(x)+kx\psi-4\psi^2$, $k\in\Re$, *για κάθε* $x\in\Re$.
i) Να βρεθεί ο $k\in\Re$.
ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$.
iii) Να βρεθεί η συνάρτηση f.

88. Η κλίση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f: $\Re\to\Re$ στο τυχαίο σημείο Μ(x, f(x)) είναι ίση με το διπλάσιο της τιμής της f στο x. Αν f(0)=1, να βρεθεί ο τύπος της f.

89. Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν:
i) $f'''(x)=24x+12$, $x\in\Re$ *και* $f''(0)=f'(0)=f(0)=2$
ii) $f'(x)=2(x-1)e^{x^2-2x+1}$, $x\in\Re$ και f(1)=2
iii) $f'(x)=\eta\mu 3x+\sigma\upsilon\nu 2x$ και $f(0)=-\dfrac{1}{3}$
iv) $f'(x)=2e^{2x}+\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=e^2$.

90. Αν για τη συνάρτηση f: $\Re\to\Re$ ισχύει $f'(x^3)=2x^3+1$, $\chi\in\Re$ και το σημείο Μ(1,3) ανήκει στην C_f, να βρεθεί ο τύπος της f.

91. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\Re$, αν $\frac{f(x)}{f'(x)}+x\ln x=0$ για κάθε $x>1$ και η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(e, f(e))$ είναι κάθετη στην ευθεία $x-\psi=2$.

92. Έστω μία συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη στο $\Re$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(x^2+1)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0\ ,\ x\in\Re.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$, $x\in\Re$ είναι σταθερή.
ii) Αν η κλήση της f στο σημείο M(1,2) είναι ίση με –2, να βρεθεί ο τύπος της f.

93. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, αν $f(0)=0$ και $f'(x)e^{f(x)}=2x$ για κάθε $x\in\Re$.

Μονοτονία

94. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=-x^3-3x^2+9x+2$ και $g(x)=\frac{x^2+3x+5}{x-1}$.

i) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι f και f΄.
ii) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η g.

95. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=x\ln x-x+1$ ii) $f(x)=e^x-x+4$ iii) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+1$

iv) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ v) $f(x)=\frac{x^2-2}{2x-3}$ vi) $f(x)=\frac{x+\ln x}{x-\ln x}$

vii) $f(x)=1-\text{συν}2x-2\sqrt{3}\text{ημ}x,\ x\in[0,\pi]$ viii) $f(x)=x+\ln(x^2+1)$

96. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\frac{x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ ii) $f(x)=2xe^x-e(x+1)^2+2e$ iii) $f(x)=x+\frac{x+2}{x+1}$

iv) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x, & x\le 0 \text{ ή } x\ge 4 \\ 3x^2-4x, & 0<x<4 \end{cases}$ v) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & x\le 1 \\ x^2-8x+9, & x>1 \end{cases}$

97. Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in\Re$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\mu x^2+4x-5$, $x\in\Re$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

98. Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in\Re$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=3x^3+3\mu x^2+(3\mu+4)x+3$, $x\in\Re$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

99. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία υποθέτουμε ότι: $f(x)+\frac{1}{3}\left[f(x)\right]^3=(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$, $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

100. α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \Re$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=-2x^3+\alpha x^2-6x+7$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

β) Αν $f(x)=\dfrac{\alpha e^{-x}-(\alpha-1)e^x}{e^x+1}$ να βρεθεί το $\alpha \in \Re$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

101. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \Re$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\alpha x^2}{2+x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(-2,+\infty)$.

102. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \Re$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+2x+2)-\alpha x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

****

103. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=2e^x-2$ και $g(x)=2\ln(x+1)$.
i) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.
ii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

104. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2+\dfrac{1}{2}=0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.
ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x^4+\dfrac{4}{3}x^3-4x^2+2$.

105. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\kappa\eta\mu x-x-1$, $0<\kappa<1$.
i) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.
ii) Να βρείτε το σύνολο $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.
iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-1$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

106. Να αποδείξετε ότι κάθε μία από τις εξισώσεις έχει ακριβώς μία ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:
i) $x^2=1+\sigma\upsilon\nu x$ στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ ii) $e^x+2x=0$ στο $\Re$ iii) $\ln x+3x=0$ στο $\Re$.

107. Να λυθούν οι εξισώσεις:
i) $3^x+4^x=5^x$ ii) $5^x+12^x=13^x$ iii) $3\cdot 2^x+4\cdot 3^x=3\cdot 6^x$
iv) $e^x-e^{-x}=2xe^{-x}$ v) $\ln(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ vi) $2e^x=2+2x+x^2$

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x$, $0<\alpha<1$.
i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^{x^2-4}-\alpha^{x-2}=(x^2-4)-(x-2)$.

109. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [1, e] για την οποία υποθέτουμε ότι 0<f(x)<1 για κάθε $x \in (1, e)$. Αν $f'(x)>0$ στο (1, e) να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)+xlnx=x έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (1, e).

****

110. Να αποδείξετε ότι:

i) $x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \geq 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ii) $\ln(1+x) \leq x,\ x>-1$.

111. Να αποδείξετε ότι:

i) ημxσυνx<x για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii) η συνάρτηση $f(x)=\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

iii) $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$, αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

112. Έστω f και g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\Re$, για τις οποίες υποθέτουμε ότι $g'(x)=f'(x)+\eta\mu^2 x+e^{\chi}+1$ για κάθε $x \in \Re$.
Να αποδειχθεί ότι: g(x)+f(0)>f(x)+g(0) για x>0.

113. Αν 0<α<β, να αποδείξετε ότι: $\ln\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\ln\alpha + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ln\beta$.

114. Να αποδείξετε ότι:

i) $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ για κάθε x>0.

ii) $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, x>0 iii) $24-12x^2+x^4>24\sigma\upsilon\nu x$, x>0.

115. Να αποδείξετε ότι για κάθε α, β>0 με α>β ισχύει:

i) $\ln\frac{\alpha}{\beta} > 2\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ ii) $2\alpha\cdot\beta\cdot\ln\frac{\alpha}{\beta} < \alpha^2-\beta^2$.

116. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, x>0.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδειχθεί ότι $e^{\pi}>\pi^{e}$

iii) Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq x^e$, x>0

iv) Να αποδειχθεί ότι $\alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}$, $\alpha \geq e$.

117. Έστω f μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

i) είναι συνεχής στο $\Re$

ii) $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq f(\alpha)+\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

118. Έστω f μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

i) $f(0)=f'(0)=0$ ii) $f''(x)>0$ για $x>0$.

Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

119. Να αποδειχθεί ότι:

α) $e^x-x+1>0$ για κάθε $x\in\Re^*$.

β) η εξίσωση $2e^x+2x=x^2+2$ έχει μοναδική ρίζα την x=0.

120. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^3-\text{συν}x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ii) $f(x)=\text{ημ}x+\text{εφ}x,\ x\in\left[0.\frac{\pi}{2}\right)$

iii) $f(x)=\text{ημ}x-\text{σφ}x,\ x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ iv) $f(x)=x+\frac{9}{x},\ x\in(1,3)$

v) $f(x)=\frac{1}{|x+1|},\ x\in[0,2]$ vi) $f(x)=e^{-x}-\ln x\ \ x\in(0,1]$

Ακρότατα

121. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ ii) $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$

iii) $f(x)=\frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ iv) $f(x)=\ln(\ln x)-\ln x$

v) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ vi) $f(x)=x^x,\ x>0$

vii) $f(x)=e^x-x$ viii) $f(x)=\frac{x^2}{2}(2\ln x-1)-2x(\ln x-1)$

ix) $f(x)=2\text{ημ}^2x+2\sqrt{3}\text{συν}x,\ x\in[0,2\pi]$

122. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων:

i) $f(x)=1+|x^2-3x|$ ii) $f(x)=2x^3-15x^2+24x+12$

iii) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ iv) $f(x)=\sqrt{4x-x^3}$

v) $f(x)=\begin{cases}x^2-2, & x<1\\ 4x^2-5x, & x\geq 1\end{cases}$ vi) $f(x)=\begin{cases}x^3-16, & x<1\\ x^2-6x, & x\geq 1\end{cases}$

123. Βρείτε τα πεδία τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^2e^{-x}$, με $x\in\Delta=[-1,3]$

ii) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

iii) $f(x)=\eta\mu^2x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+2\sqrt{2},\ x\in[0,\pi]$

iv) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x, & x\geq 1 \\ 2x^2+4x-9, & x<1 \end{cases}$

v) $f(x)=\dfrac{1-x}{2+x},\ x\in[0,2]$

vi) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$

124. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα της f αν:

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+4x-9, & x<1 \\ x^2-4x, & x\geq 1 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^4-4x, & -1<x<2 \\ \dfrac{16}{x}, & 2\leq x<4 \\ \dfrac{8}{\sqrt{x}}, & 4\leq x\leq 9 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\leq 0 \\ e^x-ex-1, & x>0 \end{cases}$

iv) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$

Θεώρημα Fermat

125. Αν η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2+6x+2,\ x>0$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o=1$ με τιμή 6, τότε:
α) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\Re$.
β) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

126. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\Re$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=-4\alpha x^3+3\alpha^3x^2+6\alpha^2x+1$ παρουσιάζει στο $x_o=1$:
i) τοπικό ακρότατο ii) τοπικό μέγιστο.

127. Αν η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln(x-1)+\beta x^2-3x+5,\ \alpha,\beta\in\Re$, παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=3$,να βρείτε τους α και β. Στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές και το είδος των ακρότατων αυτών.

128. Η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει: $f^3(x)-f(x)=e^{3x}+3e^{2x}+2e^x$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν έχει ακρότατα.

129. Η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει: $2\left[f(x)\right]^3+f(x)=e^x\cdot\left(x^2-2x+3\right)$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

130. Αν ισχύει $a^x+\beta^x \geq 2$ για κάθε $x \in \Re$ (όπου α, β θετικές σταθερές) να αποδείξετε ότι:
i) η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x+\beta^x$ έχει ελάχιστο στο $x_0=0$ ii) αβ=1.

131. Έστω μία συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν: $f(1)=e$ και $f(x)-e^x+x^2 \leq 1$ για κάθε $x>0$.
i) Να αποδείξετε ότι $f'(1)+2=e$
ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο Α(1, e).

132. Έστω μία συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=2006$ και $f(x) \geq 2006+\eta\mu x$, $x \in \Re$. Να βρείτε:
α) το $f'(0)$
β) την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

133. Δίνεται η συνάρτηση $g: (0,+\infty) \to \Re$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν: $2g(x)-x^2-e^x \leq 2\ln x+1$, $x>0$ και $g(1)=\frac{e}{2}+1$. Δείξτε ότι $g'(1)=\frac{e}{2}+2$.

134. Έστω α, β, γ $\in \Re$ ώστε να ισχύει: $ax+\beta\eta\mu x+\gamma e^{-3x} \geq \gamma$, για κάθε $x \in \Re$.
Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta-3\gamma=0$.

135. Να βρεθεί ο $\nu \in N^*$, αν για το πολυώνυμο $P(x)=x^{\nu+4}+x^{\nu}-20x+18$ ισχύει $P(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

136. Έστω οι θετικοί αριθμοί α, β, γ, δ ώστε $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x+\delta^x \geq 4$ για κάθε $x \in \Re$.
Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta=1$.

137. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+(\alpha-1)x^2+3x+\alpha^2$, $x \in \Re$.
α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \Re$ για τις οποίες η f δεν έχει ακρότατα.
β) Αν α=2, να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f(x)=0.

138. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$, $\alpha \neq 0$. Αν η f παρουσιάζει στο $x_o=1$ τοπικό ακρότατο το 2 και η ευθεία ψ=x εφάπτεται της C_f στο σημείο της Ο(0, 0), να προσδιορίσετε τους α, β και γ.

139. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\alpha x^3+6\alpha^2x^2+x+2$, $\alpha \neq 0$ δεν μπορεί να έχει τρεις διαφορετικές θέσεις τοπικών ακρότατων.

****

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x+\mu e^{-x})$, $x \in \Re$ και $\mu>0$.
α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.
β) Αν x_o είναι θέση τοπικού ακρότατου της f, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x_o, f(x_o))$ βρίσκονται πάνω σε μία σταθερή ευθεία καθώς το μ διατρέχει το διάστημα $(0,+\infty)$.

141. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\mu}e^{2\mu-x}$, x>0 και μ>0.
α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o=\mu$ μέγιστο το f(μ).
β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ>0 το f(μ) γίνεται ελάχιστο.

142. Αν $f(x)=\begin{cases} x^4\eta\mu^2\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$ να αποδείξετε ότι το $x_o=0$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f και ότι $f\,'(0)=f\,''(0)=0$.

143. i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.
ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $x^x\geq e^{x-1}$ για κάθε x>0.

144. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2-\sigma\upsilon\nu 2x+1$.
i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.
ii) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0.

145. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $e^x-1\geq x$
ii) $\eta\mu(e^x-1)+3(e^x-1)\geq \eta\mu x+3x$.

146. Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού αριθμού α για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^{2\alpha}\cdot e^{4\alpha}+e^x}{e^x}$, x>0, γίνεται ελάχιστη.

147. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2$ και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(3\alpha, 27\alpha^2)$, α>0. Έστω θ η γωνία που διαγράφει η ευθεία ΟΜ, όπου Ο(0, 0) η αρχή των αξόνων, αν στραφεί γύρω από το Μ κατά την θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε.
i) Μα αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{9\alpha}{1+9\cdot 18\alpha^2}$.
ii) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ, ώστε η εφθ να γίνει μέγιστη, καθώς και τη μέγιστη τιμή της.

148. Αν ψ>0 και $x\in\Re$, να αποδείξετε ότι: $x\psi\leq e^{x-1}+\psi\ln\psi$.

149. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα Δ=[-2, 2], είναι συνεχής στο Δ, παραγωγίσιμη στο (-2, 2) και ισχύει f(-2)=f(2)=0 και f(0)=4. Αν είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

Προβλήματα με ακρότατα

150. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$, x>0 και το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ της γραφικής παράστασης της f. Από το Α φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα χ΄χ η

οποία τέμνει την ευθεία ψ=-x στο σημείο Β. Να βρείτε το α>0 ώστε το τμήμα ΑΒ να έχει το ελάχιστο δυνατό μήκος.

151. Να βρείτε σημείο Μ της υπερβολής C: $x^2-\psi^2=1$ του οποίου η απόσταση από το σημείο Α(0,-1) να είναι η ελάχιστη δυνατή.

152. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης 2x+ψ, αν x και ψ είναι τα μήκη των κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με μήκος υποτείνουσας $2\sqrt{5}$.

153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},0\right)$.

α) Να βρείτε σημείο Μ της C_f που να απέχει από το Α την ελάχιστη απόσταση
β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

154. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2$ και το σημείο $M(2\alpha,8\alpha^2)$, α>0 της C_f. Έστω ε η εφαπτόμενη της C_f στο Μ και θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ΟΜ. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε τη μέγιστη τιμή της καθώς το α διατρέχει το διάστημα $(0,+\infty)$.

155. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$, x>0 και $g(x)=-4x^2$, x>0.

α) Να βρεθεί ο $a\in\Re$, ώστε η ευθεία χ= α να τέμνει τις C_f και C_g αντίστοιχα στα σημεία Κ, Λ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ να έχει το ελάχιστο μήκος.
β) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία Κ και Λ των C_f και C_g είναι παράλληλες.

156. Να βρεθεί σημείο Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{3x}{4}+\frac{5}{x}, x>0$, το οποίο να απέχει από την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) την μικρότερη απόσταση. Στη συνέχεια να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι κάθετη στην ΟΑ.

157. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $\psi^2=8x$ και το σημείο Α(4, 2). Να βρεθεί σημείο Μ της παραβολής, ώστε η απόσταση ΑΜ να είναι ελάχιστη. Να αποδείξετε στη συνέχεια ότι η ΑΜ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ.

158. Μια ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(2, 2) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οχ και Οψ στα σημεία Λ και Κ αντίστοιχα. Να βρεθεί η ευθεία εκείνη για την οποία το τμήμα ΚΛ είναι ελάχιστο.

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο Α(4, 0) του άξονα χ΄χ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, ώστε το τρίγωνο ΜΑΝ $\left(A\hat{M}N=90^0\right)$ να έχει μέγιστο εμβαδόν.

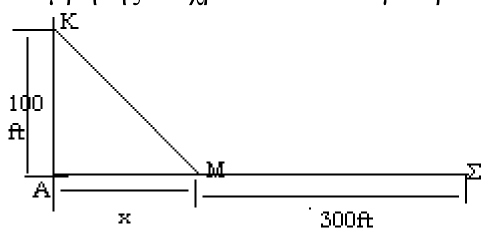
160. Αν x και ψ τα μήκη των καθέτων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα $\sqrt{5}$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης Α=2x+ψ.

161. Ένα σώμα κινείται κατακόρυφα και η απόστασή του από το έδαφος δίνεται από τη σχέση $h(t)=-8t^2+48t+56$ με h σε m και t σε sec. Να βρείτε:
i) την ταχύτητά του όταν t=0.
ii) το μέγιστο ύψος του.
iii) την ταχύτητά του όταν h=0.

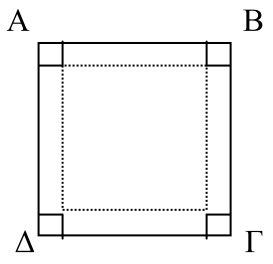
162. Ένας ελαττωματικός πύραυλος καταστρέφεται από τον υπεύθυνο επιχειρήσεων 3 sec μετά την εκτόξευσή του. Μετρήσεις έχουν αποδείξει ότι το ύψος h (σε m) στο οποίο βρίσκεται ο πύραυλος δίνεται από τη σχέση: $h(t)=20t^3-90t^2+120t$.
α) Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει ο πύραυλος.
β) Σε ποιο ύψος θα έφτανε ο πύραυλος αν ο υπεύθυνος τον κατέστρεφε 2 sec μετά την εκτόξευσή του;

163. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι: $K(x)=\frac{1}{3}x^3-20x^2+600x+1000$ χιλιάδες ευρώ με $0\leq x\leq 150$. Οι εισπράξεις από την πώληση των x μονάδων του προϊόντος είναι $E(x)=420x-2x^2$ χιλ. ευρώ.
α) Να εκφραστεί το κέρδος P(x) της βιομηχανίας ως συνάρτηση του x.
β) Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή της βιομηχανίας για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

164. Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα 100ft μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μίας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακριά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμπήσει με ταχύτητα 3ft/sec και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/sec.
α) Να αποδείξετε ότι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του παρακάτω σχήματος ο κολυμβητής χρειάζεται χρόνο $T(x)=\frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3}+\frac{300-x}{5}$ sec.
β) Για ποια τιμή του x, ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φτάσει στο σπίτι του;



165. Από τις τέσσερις γωνίες ενός φύλλου χαρτιού σχήματος τετραγώνου με πλευρά α=6dm πρόκειται να αποκοπούν τέσσερα ίσα τετράγωνα. Ποια πρέπει να είναι η πλευρά των τετραγώνων αυτών, ώστε το κουτί που θα προκύψει με αναδίπλωση να έχει το μέγιστο δυνατό όγκο;



166. Ένας μικροοργανισμός που κινείται στο αίμα ενός ασθενούς με ταχύτητα υ, καταναλώνει ενέργεια Ε που δίνεται από τη σχέση $E(\upsilon)=\frac{1}{\upsilon}\left[2\left(\upsilon-35\right)^{2}+750\right]$.

Να βρείτε:

α) την παράγωγο $\frac{dE}{d\upsilon}$.

β) με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται ο μικροοργανισμός ώστε να καταναλώνει την ελάχιστη ενέργεια;

167. Πρόκειται να κατασκευαστεί μία μεταλλική δεξαμενή, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του οποίου η βάση είναι τετράγωνο. Η δεξαμενή πρέπει να έχει όγκο $400m^3$. Αν το υλικό κατασκευής των τετράγωνων εδρών κοστίζει 55 ευρώ το m^2 ενώ των ορθογωνίων εδρών 70 ευρώ το m^2, να βρεθούν οι διαστάσεις της δεξαμενής, ώστε το κόστος της δεξαμενής να είναι το ελάχιστο δυνατό.

168. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που είναι εγγεγραμμένα σε γνωστό κύκλο (Ο, R), να αποδειχθεί ότι το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

169. Ένα μεταλλικό κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ανοικτό στην επάνω έδρα του, έχει όγκο $288cm^3$ και οι διαστάσεις της βάσης του έχουν λόγο $\frac{2}{1}$.

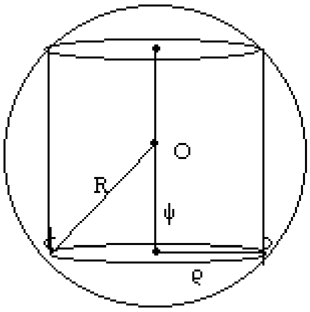
Να βρεθούν οι διαστάσεις του κουτιού ώστε η ποσότητα μέταλλου που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του να είναι ελάχιστη.

170. Ένα σύρμα μήκους L κόβεται σε δύο κομμάτια. Με το ένα κομμάτι σχηματίζεται ένα τετράγωνο , ενώ με το άλλο ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Πως πρέπει να κοπεί το σύρμα, ώστε το άθροισμα των επιφανειών να είναι ελάχιστο;

171. Κύλινδρος με μεταβλητή ακτίνα βάσης ρ και μεταβλητό ύψος υ=2ψ είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα ακτίνας R=5.

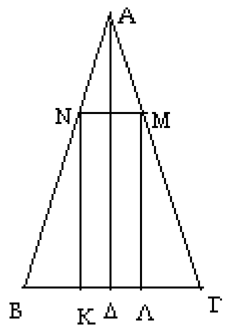
α) Να εκφράσετε τον όγκο V του κυλίνδρου συναρτήσει της ακτίνας ρ της βάσης του.

β) Να βρείτε την τιμή του ρ, ώστε ο όγκος V να είναι μέγιστος καθώς και τον μέγιστο



όγκο.

172. Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) του σχήματος έχει βάση ΒΓ=4m και ύψος ΑΔ=5m. Να αποδείξετε ότι δεν μπορούμε να εγγράψουμε σε αυτό ορθογώνιο



ΚΛΜΝ με εμβαδόν μεγαλύτερο από $5m^2$.

****
****
****
*

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Θεώρημα ROLLE

1. Θ. Rolle στο [0,1].
2. Θ. Rolle στο [0,4].
3. ii) Από g΄(ξ)=0 προκύπτει f ΄(ξ)=-2ξ.
4. ξ=$-\frac{1}{3}$.
5. Ισχύει. ξ=0.
6. μ=4, ν=4, ρ=1.
7. Έστω f(α)=f(β), από θ. Rolle, άτοπο.
8. α) α=-1/2, β=-1/2, γ=0. β) Θ. Rolle στην f στο διάστημα [0,1] για να δείξω ότι f ΄(ξ)=0.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

9. i) ξ=-1, ii) ξ= $\sqrt{10}$, iii) ξ= $\frac{\sqrt{3}}{3}$, iv) ξ= $\frac{13}{4}$, v) Δεν ισχύει.
10. Από Θ.Μ.Τ. βρίσκω ότι: f ΄(ξ)=-1.
11. Από Θ.Μ.Τ. βρίσκω ότι: f ΄(ξ)=$\frac{f(5)+2}{4}$, αλλά $|f'(\xi)|<2 \Leftrightarrow$ ......
12. Όμοια με την 11.
13. Από Θ.Μ.Τ. στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και Rolle στο [ξ_1,ξ_2].
14. Από Θ.Μ.Τ. στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και με δεδομένο ότι f(α)=f(β), προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο.
15. Ισχύει f ΄(x_o)=0 γιατί η f έχει ακρότατο. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f ΄ στα διαστήματα [0,x_0] και [x_0,5], παίρνω $f'(0)=-x_0 f''(\xi_1)$ και $f'(5)=(5-x_0)f''(\xi_2)$. Άρα $|f'(0)+f'(5)|=....\leq 5$.
16. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα [0,1/3], [1/3,2/3], [2/3,1] και προσθέτω κατά μέλη.
17. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα [1,2] και [4,5]. Από τη μονοτονία της f ΄ έχω f ΄(ξ_1)>f ΄(ξ_2) άρα…………..
18. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα [0,1], [1,2], [2,3] και προσθέτω κατά μέλη.
19. i) Στη δοσμένη σχέση για x=0 καο για x=1 παίρνω f(0)=0 και f(2)=2f(1). ii) Η σχέση του i) γίνεται: f(1)-f(0)=f(2)-f(1). Από Θ.Rolle στα [0,1] και [1,2] έχουμε f ΄(ξ_1)=f ΄(ξ_2)=0 και τέλος Θ.Rolle στην f ΄΄(x) στο [ξ_1,ξ_2] παίρνουμε f ΄΄(ξ)=0.
20. Η δοθείσα για x=0 δίνει f(0)=0 και για x=1 και κ=2: f(2)=2f(1). Άρα f(1)-f(0)=f(2)-f(1) και συνεχίζουμε όπως στην 19.
21. α) Θ.Rolle για την f στο [0,π/2]. β) Θ.Rolle για την f ΄ στο [x_0, π/2].
22. f(α)=f(β)=1. Άρα g(α)=g(β)=e και από Θ.Rolle για την g στο [α,β]: g΄(ξ_1)=0. Έπειτα Θ.Rolle για την g΄ στα [α,ξ_1], [ξ_1,β] κ.λ.π.
23. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο [2,3].
24. Θ.Μ.Τ. για την f στο [-α,α] και εφαρμογή της δοθείσας ανισότητας.
25. Όπως η 24 και επιπλέον ιδιότητες των απόλυτων τιμών.
26. Θ.Μ.Τ. για την f στο [0,2] 24 και επιπλέον ιδιότητες των απόλυτων τιμών.
27. α) Η δοθείσα γίνεται $\left(|x|-2\right)^2 \geq 0$ που αληθεύει για κάθε $x\in\Re$.
    β) Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο [α,β] και χρησιμοποιώ την ανισοισότητα του ερωτήματος α.

Απόδειξη ανισοτήτων.

28. β) Από το α) βρίσκω $\eta\mu 2\xi=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\beta}{\alpha-\beta}$ και επειδή $|\eta\mu 2\xi|\leq 1$ προκύπτει η ζητούμενη.
29. β) Από το α) βρίσκω $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}=\frac{\varepsilon\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta}{\alpha-\beta}$ και με αντικατάσταση στη ζητούμενη ανισότητα και πράξεις καταλήγω στην α<ξ<β που αληθεύει.
30. γ) Από το β) έχω $\frac{1}{\xi}=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ και με αντικατάσταση στη ζητούμενη ανισότητα και πράξεις καταλήγω στην x<ξ<x+1 που αληθεύει.
31. Θ.Μ.Τ στο [α,β] για την f . Βρίσκω $f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ και επειδή f(α)>f(β) και α<β προκύπτει το ζητούμενο.
32. Από Θ,Μ,Τα στο [2005,2006] για την f έχω f ΄(ξ)=f(2006). Επειδή η f ΄ γν φθίνουσα ισχύει 2005<ξ<2006 άρα: f ΄(2005)>f ΄(ξ)<f ΄(2006) κ.λ.π.

33. Θ.Μ.Τ. για την f στο [1,x] αν x>1 ή στο [x,1] αν x<1 (δύο περιπτώσεις) και εφαρμογή της δοσμένης ανισότητας.
34. Θ.Μ.Τ. για την f στο [α,β] και εφαρμογή της δοσμένης ανισότητας.
35. β) Προκύπτει από το συμπέρασμα του θ. Rolle που ισχύει από το α).
36. i) Θ.Μ.Τ. στην f(x)=ln(ημx) , [α,β]. ii) Θ.Μ.Τ. στην $f(x)=x^{\nu}$, [β.α], η ισότητα ισχύει αν α=β.
 iii) Θ.Μ.Τ. στην $f(x)=e^{x-1}$, [1,x], για x=1 χωριστά.
 iv) Θ.Μ.Τ. στην $f(x)=e^{t}$, [ψ,x]. v) Θ.Μ.Τ. στην f(x)= $\sqrt{1+x}-1$, [x,0].
 vi) Θ.Μ.Τ. στην f(x)=lnx, [x-1,x].
37. Θ.Μ.Τ στα [α,γ] και [γ,β] για την f και Θ.Μ.Τ στο $[\xi_1,\xi_2]$ για την f ΄.
38. Αν α<β<γ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. στα [α,β], [β,γ]. Αλλά $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$ γιατί τα σημεία είναι συνευθειακά ……..
39. Είναι f(4)-f(1)=f(7)-f(4) οπότε από Θ.Μ.Τ. στα [1,4] και [4,7] κ.λ.π.
40.
41. Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\dfrac{2\alpha+\beta}{3},\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right]$ οπότε από τη δοσμένη σχέση παίρνω $f\,'(\alpha)=f\,'(\xi_1)$ και μετά Θ. Rolle στο $[\alpha,\xi_1]$ για την f ΄.
42. Συμπέρασμα του Θ. Rolle του ερωτ. α).
43. α) Θ. Bolzano στο [α,β] για την g(x)=(κ+λ)f(x)-κf(α)-λf(β) : $g(x_0)=0$.
 β)Θ.Μ.Τ για την f στα $[\alpha.x_0]$, $[x_0,\beta]$
44. Όπως η 43 για κ=1 και λ=3.
45. Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$. Ισχύει ότι f ΄(x) γν. αύξουσα…….
46. Θ.Μ.Τ. για την f στα [α,0] και [0,β]. Παίρνω $0 \le f(0) \le 0$.
47. α=β=3. ξ=1.
48. Δείχνω με Θ.Μ.Τ για την f στο [α,β] ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta),\ \mu\varepsilon\ f\,'(\xi)=2$.
49. Θ.Μ.Τ για την g στα [-α,0] και [0,α] και Θ. Rolle για την g΄ στο $[\xi_1,\xi_2]$.
50. Από Θ. Bolzano στην g(x)=f(x)-1/2 στο [0,1] , υπάρχει $x_0\in(0,1)\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(x_0)=\dfrac{1}{2}$. Μετά Θ.Μ.Τ για την f στα $(0,x_o)$ και $(x_o,1)$, άρα….
51. α) Καταλήγω σε άτοπο υποθέτοντας ότι g(β)=0 και εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την g στο [α,β].
 γ) ισχύει ως συμπέρασμα του Θ. Rolle από το β).
52. Υποθέτουμε ότι έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$ και άτοπο από Θ. Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$.
53. Έστω ότι έχει 3 ρίζες με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Θ. Rolle για την f στα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ γιατί ισχύει $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ και κατόπιν Θ. Rolle για την f ΄ στο $[\xi_1,\xi_2]$ και άτοπο.
54. Θ. Rolle στην $F(x)=x^4+(\alpha-1)x^3+\beta x^2-(\alpha+\beta)x$ στο [0,1] (αρχική της f) .
55. Έστω ότι έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (1,2) τότε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$. Θ. Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$ και άτοπο.
56. Επειδή f(-1)f(0)<0 από Θ. Bolzano η f(x)=0 έχει τουλ. Μια ρίζα στο [-1,0]. Έστω ότι έχει δύο ρίζες στο $\Re$, τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. Τότε καταλήγω σε άτοπο από Θ. Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$.
57. Θ. Rolle στην F(x)= $\dfrac{ax^5}{5}+\dfrac{\beta x^2}{2}+10\gamma x$ (αρχική της f) στο [0,1].
58. Έστω ότι έχει τρεις ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$, άρα $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$. Θ. Rolle στην f στα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ άρα $f\,'(\xi_1)=f\,'(\xi_2)=0$ και μετά Θ. Rolle στην f΄΄ στο $[\xi_1,\xi_2]$ και άτοπο.
59. Θεωρώ την $h(x)=f(x)-g(x)=4x^3-9x^2-2x+9$. Εφαρμόζω Θ. Rolle στην $F(x)=x^4-3x^3-x^2+9x$ (αρχική της f) στο [1,2].
60. Η f έχει 4 ρίζες διαφορετικές. Μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει ρίζα της παραγώγου της. Άρα η f ΄έχει 3 τουλ ρίζες και επειδή είναι 3ου βαθμού, θα έχει 3 ακριβώς.
61. A) Θ. Rolle στην F(x)= $\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{\beta}{3}x^2-\dfrac{1}{3}(\alpha-\beta)x$ στο [0,1].
 B) α) Α, β) Α, γ) Ψ, δ) Α.
62. Θ. Rolle στην g(x)=f(x)-cx, στο[α,β].
63. Θ. Rolle στην g(x)=(x-c)f(x) στο [α,β].
64.
65. Θ. Rolle στην $g(x)=x^{\nu}f(x)$ στο [α,β].
66. Θ. Rolle στην $g(x)=f(x)/x^{\nu}$ στο [α,β].
67. Θ. Rolle στην g(x)=ημxf(x) στο [α,β].
68. Θ. Rolle στην g(x)=συνxf(x) στο [α,β].
69. Θ. Rolle στην $g(x)=e^{-h(x)}f(x)$ στο [α,β].
70. Θ.Μ.Τ. στην $f(t)=t^{x}$, t>0 στα διαστήματα [2,3] και [4,5].
71. Ομοίως στην ιδια στα [3,4] και [6,7].
72. Το 0 βεβαιώνεται με αντικατάσταση. Έστω ότι έχει δύο ρίζες $\rho_1<\rho_2$, Θ. Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$, άτοπο…
73. Το 1 και το 2 βεβαιώνεται με αντικατάσταση. Έστω ότι έχει τρεις ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$, τότε, από Θ. Rolle για την f στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ προκύπτει $f\,'(\xi_1)=f\,'(\xi_2)=0$ και από Θ. Rolle στην f ΄ στο $[\xi_1,\xi_2]$ παίρνω $f\,''(\xi)=0$ άτοπο.

74. Θ.Μ.Τ. στην $f(t)=t^x$, t>0 στα διαστήματα [4,5] και [7,8].

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

75. Η $h(x)=(f(x))^2+(g(x))^2$ έχει παράγωγο ίση με 0. Άρα $(f(x))^2+(g(x))^2=c$. Για x=0 βρίσκω ότι c=1.
76. α) Δείχνω ότι g΄(x). β) f(x)=f ΄(x)=0.
77. Η $h(x)=(f\,'(x))^2+(f(x))^2$ έχει παράγωγο ίση με 0. Προσδιορίζω το c από τα δεδομένα.
78. g΄(x)=0 και g(x)=3.
79. Δείχνω ότι h΄(x)=0.
80. Δείχνω ότι h΄(x)=0. h(x)=100.
81. α) Από την δοσμένη παίρνω $f(x)=g(x)+cx+c_1$. Με εφαρμογή των δεδομένων παίρνω $c_1=0$.
β) Θ. Bolzano στην f(x)=g(x)+cx στο [α,β].(Περιπτώσεις για c=0 και για $c\neq 0$).
82. Για $\psi=x_0$ και κρ. παρεμβολής βρίσκω ότι $f\,'(x_0)=0$.
83. Είναι $f(x)=g(x)+c_1x+c_2$ και με εφαρμογή των δεδομένων βρίσκω $c_1=1$ και $c_2=0$.
84. i) Δείχνω ότι g΄(x)=0. ii) $f(x)=e^{e^x}$.
85. i) Η h(x) είναι σταθερή γιατί h΄(x)=0. ii) Είναι c=0 άρα f=g.
86. ii) φ(x)=0. ii) Επειδή g(x)=0 από το i), ισχύει το ζητούμενο.
87. i) κ=-8. ii) f ΄(x)=κx=-8x. iii) $f(x)=-4x^2+8$.
88. $f(x)=e^{2x}$.
89. i) $f(x)=x^4+2x^3+x^2+2x+2$. ii) $f(x)=e^{x^2-2x+1}+1.$
iii) $f(x)=-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x+\frac{1}{2}\eta\mu 2x.$ iv) $f(x)=e^{2x}+\ln x.$
90. $f(x)=x^2+x+1$.
91. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $\frac{1}{x}f(x)+f\,'(x)\ln x=0 \Leftrightarrow \left(f(x)\ln x\right)'=0 \Rightarrow f(x)\ln x=c$. Αλλά c=e,
επομένως: $f(x)=\frac{e}{\ln x},\ x>1.$
92. i) g΄(x)=0 με τη βοήθεια της δοθείσας σχέσης.
ii) $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$.
93. $f(x)=\ln(x^2+1)$.

Μονοτονία

94. i) f $\nearrow \sigma\tau o\,(-\infty,-3],[1,+\infty)$ και $\searrow \sigma\tau o\,[-3,1]$. f ΄ $\nearrow \sigma\tau o\,(-\infty,-1]\ \kappa\alpha\iota\ \searrow\ \sigma\tau o\ [-1,+\infty)$.
ii) $g \nearrow \sigma\tau\alpha\,(-\infty,-2],[4,+\infty)$ και $\searrow \sigma\tau\alpha\,[-2,1),(1,4]$.
95. i) $\searrow \sigma\tau o\,(0,1], \nearrow \sigma\tau o\,[1,+\infty)$. ii) $\searrow \sigma\tau o\,(-\infty,0], \nearrow \sigma\tau o\,[0,+\infty)$
iii) $\nearrow \sigma\tau\alpha\,(-\infty,-1],[2,+\infty)\,\kappa\alpha\iota\ \searrow \sigma\tau o\,[-1,2]$.
iv) $\nearrow \sigma\tau\alpha\,(-\infty,-2],[0,+\infty)\,\kappa\alpha\iota\ \searrow \sigma\tau\alpha\,[-2,-1),(-1,0]$.
v) $\nearrow \sigma\tau\alpha\,(-\infty,1],[2,+\infty)\,\kappa\alpha\iota\ \searrow \sigma\tau\alpha\,[1,3/2),(3/2,2]$.
vi) $\nearrow \sigma\tau o\,(0,1]\,\kappa\alpha\iota\ \searrow \sigma\tau o\,[1,+\infty)$ vii) $\searrow \sigma\tau\alpha \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]\kappa\alpha\iota\ \nearrow \sigma\tau\alpha \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.
viii) $\nearrow \sigma\tau o\,\Re$.
96. i) $\nearrow \sigma\tau o\ \Re$. ii) $\nearrow \sigma\tau\alpha\,(-\infty,-1],[1,+\infty)\,\kappa\alpha\iota\ \searrow \sigma\tau o\,[-1,1]$.
iii) $\nearrow \sigma\tau\alpha\,(-\infty,-1-\sqrt{3}],[-1+\sqrt{3},+\infty)\ \searrow \sigma\tau o\,[-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}]$.
iv) $\searrow \sigma\tau\alpha\,(-\infty,-2],[0,\frac{2}{3}]$ $\nearrow \sigma\tau\alpha\,[-2,0],[\frac{2}{3},+\infty)$
v) $\searrow \sigma\tau\alpha\,(-\infty,0],[1,4]\,\kappa\alpha\iota$ $\nearrow \sigma\tau\alpha\,[0,1],[4,+\infty)$.
97. $\mu\in[-2,2]$.
98. $\mu\in[-1,4]$.
99. Είναι $f\,'(x)=\frac{x(e^x-1)}{1+f^2(x)}\geq 0\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \ldots$
100. α) $\alpha\in[-6,6]$. β) $\alpha\leq 0$.
101. $\alpha\in\left[-\frac{1}{4},0\right)$.

102. $\alpha \in (-\infty, -1]$.

103. i) Κοινό σημείο το Ο(0,0). ii) ψ=2x.

104. i) Μια στο $(-\infty, -2)$ και μια στο (-2,9). ii) $\text{f(A)} = \left[-\frac{13}{6}, +\infty\right)$.

105. i) f ΄(x)=κσυνx-1<0 άρα f γν. φθίνουσα στο $\Re$.

ii) $\text{f(A)} = \left[\frac{2\kappa - \pi - 2}{2}, -1\right]$. iii) Η g(x)=f(x)+1 έχει μοναδική ρίζα το 0.

106. Δείχνω για την καθεμία ότι είναι γν. μονότονη και ότι το 0 ανήκει στο π. τιμών της.

107. i) Προφανής ρίζα το 2 και μονοτονία της $\text{f(x)} = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$ για την μοναδικότητα.

ii) Όμοια. iii) Προφανής ρίζα το 1 και μονοτονία της $\text{f(x)} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^x + 4\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$.

iv) Προφανής ρίζα το 0 και ακρότατο το f(0)=0.

v) Όμοια. vi) Προφανής ρίζα το 0 και μονοτονία της f (το πρόσημο της f ΄ προκύπτει από την μονοτονία της μέσω της f ΄΄).

108. i) f ΄(x)<0 άρα f $\searrow \sigma\tau o\ \Re$. ii) x=-1, x=2.

109. Θ. Bolzano στην g(x)=f(x)+xlnx-x στο $[1, e]$ και επειδή g΄(x)>0 $\Rightarrow g(x) \nearrow$ στο [1,e], η ρίζα είναι μοναδική.

110. i) Θεωρούμε την f(x)=xημx+συνx-1. Είναι f(0)=0 και f $\nearrow \sigma\tau o \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\ \acute{\alpha}\rho\alpha$ για $x \geq 0 \Rightarrow \text{f(x)} \geq \text{f(0)}$..... ii) Θεωρούμε την f(x)=ln(1+x)-x στο (-1,+∞). Είναι $\text{f ΄(x)} = \frac{-\text{x}}{1+\text{x}}$.

Έχουμε: f ΄(x)>0 στο (-1,0) και f ΄(x)<0 στο (0,+∞) και f(0)=0. Επομένως f(x)$\leq$ 0 στο (-1,+∞)

111. i) Μελετώ την μονοτονία της f(x)=ημxσυνx-x στο (0,π/2).
ii) Μελετώ την μονοτονία της f(x) στο (0,π/2). iii) Για α<β είναι f(α)<f(β)……..

112. Αν h(x)=g(x)-f(x) τότε h΄(x)>0 δηλαδή η h είναι γν. αύξουσα στο $\Re$ άρα και στο (0,+∞). Οπότε για x>0 $\Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow$ …….

113. Θέτω όπου β το x και μελετώ την μονοτονία της συνάρτησης $\text{f(x)} = \ln\frac{\text{x}+\alpha}{2} - \frac{\alpha\ln\alpha}{x+\alpha} - \frac{x\ln x}{x+\alpha}$ για $x \geq \alpha$. Η f είναι γν. φθίνουσα άρα για β>α είναι f(β)<f(α) ………

114. Τα φέρνω όλα στο πρώτο μέλος και μελετώ την μονοτονία της αντίστοιχης συνάρτησης. Για την εύρεση του πρόσημου της f ΄απαιτείται η εύρεση της f ΄΄ ίσως και της f ΄΄΄.

115. Όπως στην 113, θεωρώ μία από τις μεταβλητές ως x και μελετώ την μονοτονία της αντίστοιχης συνάρτησης.

116. i) Η f είναι $\nearrow \sigma\tau o\,(0, e]$ και $\searrow \sigma\tau o\ [e, +\infty)$.

ii) π>e$\Rightarrow$ f(π)<f(e)…… iii) Από τον πίνακα της μονοτονίας της f είναι: $\text{f(x)} \leq \frac{1}{\text{e}} \Leftrightarrow e^x \geq x^e$.

iv) Επειδή $\alpha + 1 > \alpha \geq e\ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu\omega$ f(α+1)<f(α)……….

117. Είναι f ΄(x) γν. φθίνουσα στο [α,β]. Θεωρούμε την

$g(x) = \text{f(x)} - \text{f}(\alpha) - \frac{\text{f}(\alpha) - \text{f}(\beta)}{\alpha - \beta}(x - \alpha)$ Είναι g΄(x)=f ΄(x)-f ΄(x_0) , $x_0 \in$ (α,β) …

118. Πρώτα δείχνω ότι η g είναι συνεχής στο 0. $g΄(x) = \frac{\text{f ΄(x) x} - \text{f(x)}}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$. $h΄(x) = x\,\text{f ΄΄(x)} > 0\ \gamma\iota\alpha\ \text{x} > 0$ άρα $h \nearrow \sigma\tau o\ (0, +\infty) \Rightarrow$ …………….

119. α) Έστω h(x)=e^x-x+1. Τότε η h είναι : $\searrow \sigma\tau o\,(-\infty, 0)\ \kappa\alpha\iota \nearrow \sigma\tau o\ (0, +\infty)$. Άρα για x<0 και για x>0 είναι h(x)>0….

β) Η f(x)=2e^x+2x-x^2-2 έχει f ΄(x)=h(x)>0 ….

120. i) f(A)=$\left[-1, \frac{\pi^3}{8}\right]$, ii) f(A)=$[0, +\infty)$, iii) f(A)=$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, 1\right]$, iv) f(A)=(6,10),

v) f(A)=[1/3,1], vi) f(A)=$\left[e^{-1}, +\infty\right)$.

Ακρότατα.

121. i) Τοπικό ελ. το f(1)=0 και τοπ. μεγ. το f(-3)=32. ii) f(0)=f(2)=0 είναι τοπ. ελάχιστα.
iii) Τοπ. ελάχιστο για x=-3 και τοπ. μέγιστο για x=1/3.
iv) Τοπ. μέγιστο το f(e)=-1.
v) Τοπ. μέγιστο το f(e)=1/e. vi) Τοπ. ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.
vii) Τοπ. ελάχιστο το f(0)=1. viii) Είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.
ix) Έχει τ.μ. για x=0, π/2, 3π/2 και τ.ε. για x=π/3, 2π/3, 2π.

122. i) 0 και 3. ii) 1 και 4. iii) 1 και –1. iv) $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. v) 0 και 1. vi) 0, 1, 3.

123. i) f(A)=[0,e], ii) f(A)=[-1,1], iii) $f(A)=\left[\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right]$, iv) $f(A)=[-11,+\infty)$,
v) $f(A)=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, vi) f(A)=[1/3, 3].

124. i) Τ.ελ. για x=-1 και x=2. ii) Τ. ελ. για x=1 και τ. μ.εγ. για x=2. iii) Τ. ελ. για x=-1 και για x=1 και τ. μέγ. Για x=0. iv) Ελάχ. Για x=0.

Θεώρημα Fermat .

125. α=β=-2.
126. i) α=1 ή –2. ii) a=1.
127. α=3/2, β=3/8.
128. f ΄(x)>0 στο $\Re$.
129. f ΄(x)>0 στο $\Re$.
130. Θ. Fermat f ΄(0)=0 άρα…….
131. i) Θ. Fermat στην $g(x)=f(x)-e^x+x^2-1$ η οποία έχει μέγιστο το 0 για x=1. ιι) ψ=(e-2)x+2.
132. α) Θ. Fermat στην g(x)=f(x)-2006-ημx. f ΄(0)=1. β) ψ=x+2006.
133. Θ. Fermat στην $h(x)=2g(x)-x^2-e^x-2\ln x-1$. h΄(1)=0.
134. Θ. Fermat στην $f(x)=\alpha x+\beta\eta\mu x+\gamma e^{-3x}-\gamma$. f ΄(0)=0 $\Rightarrow$ ……. $\Rightarrow$ α+β-3γ=0.
135. ν=8.
136. Όμοια με την 134.
137. α) $a\in[-2,4]$. β) Μία ρίζα ακριβώς.
138. α=-3, β=4, γ=1.
139. Έστω ότι έχει τρείς θέσεις τοπικών ακροτάτων οπότε $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$. (Από Θ. Fermat) . Έπειτα από Θ.Μ.Τ. στα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ παίρνω $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$, άτοπο γιατί η f ΄΄(x)=0 έχει Δ<0.
140. α) $x_0=\frac{\ln\mu}{2}$. β) ψ=x+ln2.
141. β) $\mu=\frac{1}{e^2}$.
142. Είναι f(x)>0 για κάθε x $\neq$ 0, $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$ άρα $f(x)\geq f(0)=0, x\in\Re$..
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=$$
0.
143. i) $\nearrow \sigma\tau\alpha\ (-\infty,0),[1,+\infty)\ \kappa\alpha\iota\ \searrow \sigma\tau o\ (0,1]$. ii) Με λογαρίθμιση της δοσμένης και όλα στο πρώτο μέλος, βλέπουμε ότι είναι αρκετό να δείξουμε ότι η g(x)=xlnx-x+1 έχει ελάχιστο το 0.
144. i) Βρίσκω το πρόσημο της f ΄ μέσω της f ΄΄ και δεδομένου ότι f(0)=0……. ii) $x_o=0$ μοναδική ρίζα.
145. i) Μονοτονία και ακρότατα της $f(x)=e^x-1-x$. ii) Μονοτονία της g(x)=ημx+3x και σχέση με το ερώτημα i).
146. α=1/2.
147. ii) εφθ=εφ(φ-ω)=…….
148. Θεωρώ την $f(\psi)=x\psi-e^{x-1}-\psi\ln\psi$, ψ>0 και δείχνω ότι έχει μέγιστο το 0.
149. Επειδή $f'(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ x\neq 0$ η f δεν έχει ακρότατο στο $(-2,0)\cup(0,2)$. Έχει ελάχιστο το f(-2)=f(2)=0, μέγιστο το f(0)=4.

Προβλήματα με ακρότατα.

150. α=1.
151. $M_1(1,0)$ και $M_2(-1,0)$.

152. $f(x) = 2x + \sqrt{20 - x^2}$, $x \in [0, 2\sqrt{5}]$. Μέγιστη τιμή f(4)=10.

153. α) M(4,2). β) $\lambda_{AM}=-4$, $f'(4)=1/4$ άρα…….

154. εφθ= $\frac{4a}{4-32a^2}$. $a = 4\sqrt{2}$.

155. α) α=1/2. β) Είναι $f'(1/2)=g'(1/2)$.

156. Α(2,4). Ισχύει: $\lambda_{OA} \cdot f'(2)=-1$.

157. M(2,4). $\Lambda_{\varepsilon\varphi} \cdot \lambda_{AM}=-1$.

158. ψ=-x+4.

159. M(4/3,0).

160. $A_{max}=5$. (είναι x=2, ψ=1)

161. i) u(0)=48/sec. ii) h(3)=128m. iii) u(7)=-64m/sec.

162. α) h(3)=90m. β) h(1)=50m.

163. α)P(x)= $-\frac{1}{3}x^3 + 18x^2 - 180x - 1000$, $x \in [0, 150]$. β) x=30 μονάδες προϊόντος.

164. β) x=75m.

165. x=1dm.

166. α) $\frac{dE}{d\upsilon} = 2 - \frac{3200}{\upsilon^2}$. β) υ=40.

167. Αν h το ύψος και x η πλευρά της βάσης είναι x=10m και h=4m.

168. Αν x ,ψ οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x^2+\psi^2=4R^2$. Το εμβαδόν δίνεται από τη συνάρτηση E(x)= $x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$, $x \in [0, 2R]$. Αυτή έχει μέγιστο για $x = R\sqrt{2}$ *οπότε και* $\psi = R\sqrt{2}$.

169. x= $\sqrt[3]{144}$.

170. Μήκος πλευράς τετραγώνου $\frac{4(3\sqrt{3}-4)L}{11}$.

171. α) V(ρ)= $2\pi\rho^2\sqrt{25-\rho^2}$, $\rho \in [0, 5]$. β) Ο όγκος γίνεται μέγιστος για ρ= $\frac{10\sqrt{6}}{6}$.

172. Από τα όμοια τρίγωνα ΝΚΒ και ΑΔΒ έχουμε: $\frac{KB}{KN} = \frac{\Delta B}{\Delta A} \Rightarrow \frac{2-x}{\psi} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \psi = \frac{10-5x}{2}$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: Ε=2xψ ή $E(x)=10x-5x^2$. Η Ε(x) έχει μέγιστο για x=1 το $E(1)=5m^2$.

..*.*.*.*.*.*.*